

***ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES,
INFORMATIQUE, PHYSIQUE THÉORIQUE ET
INGÉNIERIE DES SYSTÈMES***

LABORATOIRE : Institut Denis Poisson

Thèse présentée par :

Hongwei ZHANG

soutenue le : **3 Décembre 2020**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques**

**ÉQUATION DES ONDES SUR LES ESPACES
SYMÉTRIQUES ET LOCALEMENT SYMÉTRIQUES
DE TYPE NON COMPACT**

Jury de soutenance :

Jean-Philippe ANKER	Université d'Orléans	Directeur de thèse
Nicolas BURQ	Université Paris-Saclay	Directeur de thèse
Michael COWLING	University of New South Wales	Rapporteur
Nikolay TZVETKOV	Université de Cergy-Pontoise	Rapporteur
Valeria BANICA	Sorbonne Université	Examinatrice
Luc HILLAIRET	Université d'Orléans	Président du jury
Michael RUZHANSKY	Ghent University	Examineur

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Préliminaires	4
1.1.1	Structure des espaces riemanniens symétriques	4
1.1.2	Décomposition barycentrique de la chambre de Weyl	9
1.1.3	Analyse harmonique sur les espaces symétriques	10
1.1.4	Outils d'analyse fonctionnelle sur les espaces symétriques	12
1.2	Principaux résultats obtenus	13
1.2.1	Équation des ondes sur les espaces symétriques	14
1.2.2	Équation des ondes sur certains espaces localement symétriques	18
1.2.3	Caractérisation du bas du spectre L^2 de $-\Delta_Y$	20
2	Wave equation on certain noncompact Riemannian symmetric spaces	23
2.1	Introduction	24
2.2	Preliminaries	25
2.3	Pointwise estimates of the wave kernel	27
2.4	Dispersive estimates	36
2.4.1	Small time dispersive estimate	37
2.4.2	Large time dispersive estimate	38
2.5	Strichartz inequality and applications	39
2.5.1	Strichartz inequality	39
2.5.2	Global well-posedness for the semilinear wave equation	40
2.6	Further results on locally symmetric spaces	41
3	Wave equation on general noncompact Riemannian symmetric spaces	43
3.1	Introduction	44
3.2	Preliminaries	45
3.2.1	Notations	45
3.2.2	Spherical Fourier analysis on symmetric spaces	46
3.2.3	Barycentric decomposition of the Weyl chamber	47
3.3	Pointwise estimates of the wave kernel	51
3.3.1	Estimates of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)$ when $ t $ is large and $\frac{ x }{ t }$ is sufficiently small.	52
3.3.2	Estimates of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)$ in the remaining range	58
3.3.3	Estimates of $\omega_t^{\sigma,\infty}$	63
3.4	Dispersive estimates	66
3.5	Strichartz inequality and applications	68
3.5.1	Strichartz inequality	68
3.5.2	Global well-posedness for the semilinear wave equation	69
3.6	Further results for Klein-Gordon equations	70
4	Wave and Klein-Gordon equations on certain locally symmetric spaces	73
4.1	Introduction	74
4.1.1	Notations	74
4.1.2	Assumptions	75
4.1.3	Statement of the results	75

4.2	Preliminaries	77
4.2.1	Spherical analysis on noncompact symmetric spaces	77
4.2.2	Pointwise estimates of the wave kernel on symmetric spaces	78
4.3	Dispersive properties on locally symmetric spaces	79
4.4	Strichartz inequality and applications	83
4.4.1	Strichartz inequality	84
4.4.2	Global well-posedness for the semilinear Klein-Gordon equation	86
5	Bottom of the L^2 spectrum of the Laplacian on locally symmetric spaces	87
5.1	Introduction	88
5.2	First improvement	89
5.3	Second improvement	94
5.4	Further results about heat kernel bounds	94
6	Conclusion et Perspectives	97
6.1	Équation de Schrödinger sur les espaces symétriques	97
6.2	Des espaces symétriques aux espaces localement symétriques	98
6.3	Multiplicateurs oscillants liés à l'équation des ondes	99
Annexe		101
A	Paramétrix de Hadamard	101
B	Développement asymptotique du noyau de Poisson	107
	Bibliographie	111

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est consacrée principalement à l'étude de l'équation des ondes sur les espaces globalement et localement symétriques de type non compact. L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles du second ordre qui décrit la propagation des ondes, comme les ondes de l'eau, les ondes sonores, les ondes sismiques etc. Issu de l'étude des vibrations d'une corde de violon, le comportement des ondes a été modélisé progressivement par Daniel Bernoulli, Joseph-Louis Lagrange, Jean le Rond d'Alembert et Leonhard Euler entre autres au dix-huitième siècle. Depuis cette époque-là, l'équation des ondes devient un sujet de plus en plus important en physique classique (acoustique, électromagnétique, dynamique des fluides, ...) et en analyse mathématique (analyse harmonique, EDP, théorie spectrale, ...). Formellement, une équation des ondes homogène s'écrit

$$\partial_t^2 u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = 0.$$

Cette équation fait partie de la famille des équations d'évolution, où la variable en temps t joue un rôle particulier. Dans l'interprétation physique, les solutions $u(t, x)$ de cette équation décrivent les ondes qui se déplacent à vitesse 1 au cours du temps t dans une certaine direction. L'équation des ondes est dispersive, c'est-à-dire que les solutions de l'équation sous la forme d'ondes qui ont des longueurs d'onde différentes ont des vitesses différentes. La propriété de dispersion fait l'objet de nombreux travaux depuis les années 80. Une application importante de cette propriété est d'établir l'inégalité de Strichartz, qui consiste à contrôler les solutions de l'équation dispersive linéaire en termes des données initiales (et de la partie non-homogène éventuelle) en utilisant les normes espace-temps mélangées. Il est bien connu qu'une telle inégalité sert à déterminer les conditions de régularité minimale sur les données initiales assurant l'existence de solutions de l'équation semi-linéaire correspondante.

L'équation des ondes est étudiée dans divers contextes. Nous parlons brièvement de certains travaux concernés en indiquant les références afin d'éviter d'introduire trop de notations à ce stade, les détails se trouveront dans [Sect. 1.2](#). La théorie a tout d'abord été développée dans le cadre euclidien, où l'inégalité de Strichartz et l'existence (locale et globale) de solutions ont été établies successivement, ainsi que des estimations élémentaires telles que les estimations du noyau, les estimations dispersives, les estimations de smoothing local, etc., voir par exemple [\[Kap94 ; GiVe95 ; LiSo95 ; GLS97 ; KeTa98 ; DGK01\]](#). Nous nous référons au livre [\[Tao06\]](#) où Tao a donné un panorama des équations dispersives sur les espaces euclidiens.

Compte tenu de la théorie euclidienne considérable, il est naturel d'examiner l'équation des ondes sur les variétés générales pour comprendre l'influence de la géométrie sur le comportement de ses solutions. Nous nous penchons sur celles à courbure strictement négative dont les premiers exemples sont les espaces hyperboliques. En utilisant les techniques dérivées de l'espace euclidien, les résultats sur les espaces hyperboliques réels apparaissent tout d'abord dans [\[Fon94 ; Fon97\]](#), et puis dans [\[Tat01 ; MeTa11 ; MeTa12\]](#). Peu de temps après, Anker, Pierfelice et Vallarino ont établi les estimations optimales en utilisant les outils de l'analyse harmonique sphérique [\[APV12 ; AnPi14\]](#), et les ont étendues aux espaces de Damek-Ricci [\[APV15\]](#), qui contiennent tous les espaces symétriques non compacts de rang un. Il vaut la peine de mentionner que l'on a de meilleures propriétés de dispersion en courbure négative, ce qui implique une famille large des paires admissibles pour l'inégalité de Strichartz. Considérant les résultats obtenus en rang un, il est naturel de se demander si nous avons des propriétés similaires sur les espaces symétriques

non compacts de rang général.

D'un point de vue global, un espace riemannien symétrique est une variété riemannienne qui possède une symétrie autour de chaque point, c'est-à-dire une isométrie involutive laissant le point fixe. Ceci généralise la notion de réflexion en un point dans la géométrie euclidienne ordinaire. Du point de vue de la théorie de Lie, un espace symétrique est un espace homogène G/K , où G est un groupe de Lie connexe et $K \subset G$ est un sous-groupe de Lie compact fixé par une involution. Cela signifie que tous les points dans l'espace sont essentiellement comparables. Les espaces symétriques ont été découverts par Élie Cartan en 1926 et ont fait l'objet d'études approfondies, d'abord par lui, puis par de nombreux autres. La classification complète des espaces symétriques irréductibles est accomplie dans [Car26; Car27], nous nous référons plutôt au livre subséquent de Helgason [Hel78], où le contenu est bien organisé et les notations sont plus accessibles. Nous nous intéressons aux espaces symétriques de type non compact. Ce sont des variétés riemanniennes à courbure strictement négative qui comprennent de nombreux exemples importants tels que les espaces hyperboliques et les matrices spéciales définies positives. Dans cette thèse, nous regardons aussi les espaces localement symétriques (de type non compact). Ce sont les variétés riemanniennes qui sont localement isométriques à des espaces symétriques. Par exemple, les variétés connexes et complètes de courbure négative constante sont localement symétriques.

L'analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples et sur les espaces symétriques, appelée analyse harmonique sphérique, est un sujet qui a connu une forte expansion depuis les années 50. Elle relie plusieurs domaines fondamentaux des mathématiques tels que la théorie des nombres, la théorie de représentation, la théorie de Fourier et la théorie des équations aux dérivées partielles. L'analyse harmonique sphérique devient naturellement elle-même une branche centrale en mathématiques contemporaines. Après les travaux pionniers de Gel'fand et de Harish-Chandra sur les fonctions sphériques, les outils élémentaires de cette théorie ont été perfectionnés progressivement par leurs disciples. Les livres de Helgason [Hel62; Hel78; Hel00] et de Gangolli et Varadarajan [GaVa88] rendent cette théorie élégante plus accessible en résumant systématiquement ces travaux avec les commentaires et les détails. Cependant, ces outils n'ont pas été immédiatement appliqués à l'étude des équations d'évolution. Ce n'est qu'à partir des années 80 qu'ils ont été effectivement utilisés afin d'obtenir des résultats optimaux sur un tel sujet, voir [Stro81; AnLo86; Ank90; Ank92; AnJi99; CGM93; CGM95]. Comme le disent Anker et Ji dans leur article [AnJi99] : « *The reason may be that time was needed to digest and refine the formidable work of Harish-Chandra and his followers* ». Au cours des deux décennies suivantes, les équations dispersives ont commencé à être discutées sur les espaces symétriques. La plupart des résultats obtenus se fondent soit sur les structures géométriques particulières, par exemple sur les espaces symétriques de rang un [AnPi09; IoSt09; AnPi14], soit sur l'hypothèse de la régularité forte pour l'équation, voir [Has11]. Les problèmes concernant les résultats optimaux des équations dispersives restent toujours ouverts sur les espaces symétriques généraux.

Tao mentionne dans [Tao06] que « *The analysis of PDE is a beautiful subject, combining the rigour and technique of modern analysis and geometry with the very concrete real-world intuition of physics and other sciences* ». La recherche sur les espaces symétriques la rend encore plus intéressante, nous devons souvent combiner des techniques empruntées à la théorie des groupes, à la théorie des représentations, à l'analyse harmonique et aux équations aux dérivées partielles, ces interactions produisent parfois des surprises imprévues.

Plan de la thèse. Cette thèse est composée de six chapitres et d'une annexe. La première partie concerne l'étude de l'équation des ondes sur les espaces symétriques non compacts G/K de rang général. Nous considérons tout d'abord dans **Chap. 2** le cas où G est complexe, la méthode de la phase stationnaire utilisée dans ce chapitre peut être appliquée à certains cas où G est réel, en la combinant avec la paramétrix de Hadamard ainsi que la décomposition spectrale que nous introduisons dans **Chap. 3**, nous obtenons les résultats analogues sur les espaces symétriques non compacts généraux. **Chap. 2** et **Chap. 3** reprennent les articles :

- [Zhw20] Wave equation on certain Riemannian noncompact symmetric spaces, *prépublication*. (arXiv:2007.11724)
- [AnZh20b] Wave equation on general Riemannian noncompact symmetric spaces, avec J.-Ph. Anker,

prépublication. ([arXiv:2010.08467](https://arxiv.org/abs/2010.08467))

La deuxième partie est constituée de [Chap. 4](#) et [Chap. 5](#), consacrés aux espaces localement symétriques de type non compact. D’un part, nous étendons l’étude de l’équation des ondes sur les espaces symétriques à certains espaces localement symétriques. D’autre part, nous établissons une caractérisation pour le bas du L^2 spectre du laplacien sur les espaces localement symétriques. C’est un analogue en rang supérieur des résultats obtenus par Elstrodt, Patterson, Sullivan et Corlette en rang un, qui améliore les estimations établies par Leuzinger et Weber en rang supérieur. Ces deux chapitres reprennent les articles :

- [\[Zhw19\]](#) Wave and Klein–Gordon equations on certain locally symmetric spaces, à paraître dans *The Journal of Geometric Analysis*. ([arXiv:1809.05468](https://arxiv.org/abs/1809.05468))
- [\[AnZh20a\]](#) Bottom of the L^2 spectrum of the Laplacian on locally symmetric spaces, avec J.-Ph. Anker, *prépublication.* ([arXiv:2006.06473](https://arxiv.org/abs/2006.06473))

Suivant l’article célèbre de Bérard [\[Bér77\]](#), nous détaillons dans l’annexe la construction de la paramétrix de Hadamard sur les espaces symétriques.

Références générales. La première référence complète et autonome qui rend la théorie des espaces symétriques accessible est, à la connaissance de l’auteur, le premier livre de Sigurður Helgason [\[Hel62\]](#). Dans ce livre, Helgason expose la théorie de Cartan sur les espaces symétriques du point de vue de la géométrie différentielle et de la théorie de Lie. De plus, le dernier chapitre contient une brève introduction à l’analyse sur les espaces symétriques (formules d’intégration, analyse de Fourier, opérateurs différentiels invariants). Suite aux développements intervenus au cours des décennies suivantes, Helgason a développé ce dernier chapitre sous forme d’un deuxième livre [\[Hel00\]](#), qu’il a complété ensuite par un troisième livre [\[Hel94\]](#). Il a par ailleurs publié une version révisée et détaillée [\[Hel78\]](#) des premiers chapitres des [\[Hel62\]](#). Ces ouvrages de Helgason sont devenus des références standard dans le domaine.

Une autre référence classique est le livre de Gangolli and Varadarajan [\[GaVa88\]](#), où les auteurs se sont concentrés davantage sur l’analyse des fonctions sphériques. Nous nous référons également aux ouvrages de Knapp [\[Kna96\]](#) et d’Eberlein [\[Ebe96\]](#) pour les connaissances de base sur la théorie de Lie et la géométrie des variétés à courbure négative. Concernant les équations aux dérivées partielles dispersives, nous nous référons aux livres de Cazenave [\[Caz03\]](#), de Tao [\[Tao06\]](#) et de Sogge [\[Sog08\]](#).

Notation et convention. Tout au long de cette thèse, le symbole $A \lesssim B$ entre deux expressions positives signifie qu’il existe une constante $C > 0$ telle que $A \leq CB$. Le symbole $A \asymp B$ signifie que $B \lesssim A \lesssim B$. Dans ce qui suit, un espace symétrique désigne qu’un espace riemannien globalement symétrique de type non compact et de rang général à moins que nous ne soulignons spécifiquement le contraire.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Structure des espaces riemanniens symétriques

Une variété riemannienne connexe \mathbb{X} est dite (*globalement*) *symétrique* si pour chaque point $x \in \mathbb{X}$, il existe une isométrie involutive de \mathbb{X} dont x est un point fixe isolé. Un espace symétrique est un espace homogène au sens où deux points quelconques de \mathbb{X} peuvent être envoyés l'un sur l'autre par une isométrie de \mathbb{X} . Autrement dit, tous les points d'un espace symétrique sont essentiellement les mêmes. Dans cette thèse, nous adoptons plutôt le point de vue de la théorie de Lie : soient G un groupe de Lie semi-simple connexe non compact de centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G , alors le groupe quotient $\mathbb{X} = G/K$ est un *espace symétrique de type non compact*.

Sur un espace symétrique, la symétrie géodésique en chaque point s'étend toujours en une isométrie de la variété entière. Sur une variété riemannienne générale, une telle symétrie géodésique ne sera peut-être qu'une isométrie locale qui ne pourra pas être étendue en une isométrie bien définie sur la variété entière. Dans ce cas, on dit qu'elle est localement symétrique. Précisément, une variété riemannienne connexe \mathbb{Y} est un *espace localement symétrique* s'il existe un espace symétrique \mathbb{X} et un groupe Γ des isométries de \mathbb{X} tels que Γ agit de manière libre et proprement discontinue sur \mathbb{X} et, \mathbb{Y} est isométrique à $\Gamma \backslash \mathbb{X}$. Dans notre contexte, $\mathbb{X} = G/K$ est un espace symétrique de type non compact et Γ est un sous-groupe discret sans torsion de G qui agit de manière libre et proprement discontinue sur \mathbb{X} . Alors $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ est bien un espace localement symétrique de type non compact.

Exemple 1.1.1. ([Mor15, p.14]) *Le demi-plan de Poincaré*

$$\mathbf{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$$

est un espace symétrique : $\mathbf{H}^2 = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$. Nous définissons $g : \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$ par $g(z) = z + 1$, et désignons par $\Gamma = \langle g \rangle$ un sous-groupe de \mathbf{H}^2 engendré par g . Alors $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2$ est un espace localement symétrique, mais pas un espace (*globalement*) symétrique.

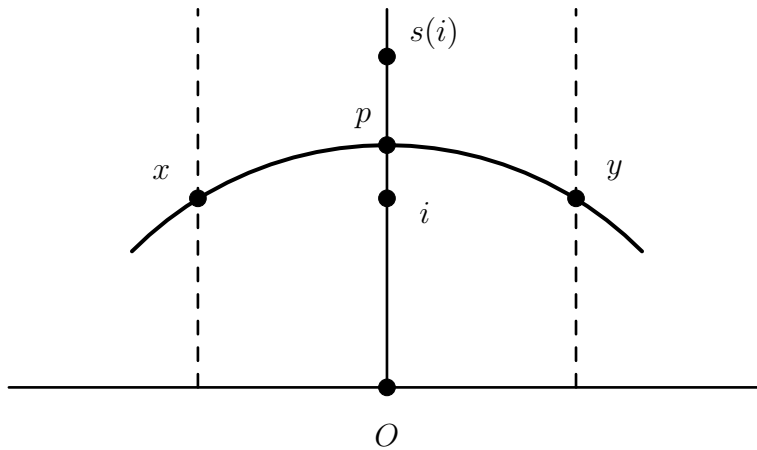


FIGURE 1.1 – s n'est pas une isométrie bien définie sur $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2$.

Soient $x = -1 + i$ et $y = 1 + i$ deux points dans \mathbf{H}^2 . Désignons par $p \in i\mathbb{R}$ le point médian du segment géodésique joignant x et y , et par s la symétrie géodésique en p . Alors $s(x) = y$, il existe $a > 1$ telle que $s(i) = ai$ car l'axe imaginaire est également une géodésique. Comme $i = x + 1 = g(x)$, x and i représentent en fait le même point dans $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2$. Néanmoins, $s(x) - s(i) = -1 + (1 - a)i$ n'est pas un entier, donc $s(x)$ et $s(i)$ ne représentent pas le même point dans $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2$. Autrement dit, s n'est pas une isométrie bien définie sur $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2$.

Structure riemannienne. Désignons par \mathfrak{g} l'algèbre de Lie semi-simple de G . Soient X_1 et X_2 deux éléments dans \mathfrak{g} , alors $\text{ad } X_1 \text{ ad } X_2$ est une transformation linéaire de \mathfrak{g} dans lui-même. La forme bilinéaire symétrique

$$B(X_1, X_2) = \text{Tr}(\text{ad } X_1 \text{ ad } X_2)$$

est appelée la *forme de Killing* sur \mathfrak{g} , d'après la personne qui l'a introduite. Soit θ un automorphisme involutif de \mathfrak{g} , on dit que θ est une *involution de Cartan* si la forme bilinéaire symétrique

$$\langle X_1, X_2 \rangle = -B(X_1, \theta X_2)$$

est définie positive. Un tel produit scalaire définit une métrique riemannienne G -invariante sur \mathbb{X} . L'espace localement symétrique \mathbb{Y} , équipé de la structure riemannienne héritée de \mathbb{X} , est également une variété riemannienne. Nous désignons par $d(\cdot, \cdot)$ la distance riemannienne commune sur \mathbb{X} et \mathbb{Y} .

Système de racines. D'après la décomposition de Cartan au niveau de l'algèbre de Lie, on peut écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

avec \mathfrak{p} le complémentaire orthogonal de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} par rapport à la forme de Killing. On identifie \mathfrak{p} avec l'espace tangent en l'origine $\mathbf{0} = eK$ de \mathbb{X} . On se fixe \mathfrak{a} un sous-espace abélien maximal de \mathfrak{p} , et désigne par $\Sigma \subset \mathfrak{a}$ le *système de racines* de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ dans \mathfrak{a}^1 : $\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$, où

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, H] = \langle \alpha, X \rangle X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

est le sous-espace propre associé à la racine $\alpha \in \Sigma$. On appelle $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ la *multiplicité* de la racine α . Notons par W le *groupe de Weyl* associé au système de racines Σ , c'est-à-dire le sous-groupe du groupe d'isométries de Σ engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux *murs* (les hyperplans orthogonaux aux racines de Σ). On définit par Σ^+ l'ensemble des racines positives de manière suivante : on fixe $H \in \mathfrak{a}$ hors des murs, puis l'on pose $\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma \mid \langle \alpha, H \rangle > 0\}$. Alors la *chambre de Weyl positive* associé au système Σ^+ est donnée par

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0, \forall \alpha \in \Sigma^+\}.$$

On note par $\overline{\mathfrak{a}^+}$ son adhérence. Notons aussi par $\Sigma_r^+ = \{\alpha \in \Sigma^+ \mid 2\alpha \notin \Sigma\}$ ² l'ensemble des *racines positives réduites*, et par $\Sigma_s = \{\alpha \in \Sigma^+ \mid \alpha \neq \beta + \gamma, \forall \beta, \gamma \in \Sigma^+\}$ l'ensemble des *racines simples* qui constituent une base de \mathfrak{a} . Désignons par ρ la demi somme des racines positives comptées avec leur multiplicités :

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha.$$

Le vecteur ρ appartient à \mathfrak{a}^+ et ne dépend que de la structure géométrique du système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. On va voir qu'il joue un rôle important et se retrouve partout dans ce qui suit.

Dimension et rang de l'espace. On dira que l'espace symétrique \mathbb{X} est de *rang* (réel) ℓ si $\dim \mathfrak{a} = \ell$, l'espace localement symétrique \mathbb{Y} est dit de rang ℓ lorsque \mathbb{X} est de rang ℓ . Désignons par d la dimension commune de \mathbb{X} et \mathbb{Y} , et par D la *dimension à l'infini* ou *pseudo-dimension* de l'espace \mathbb{X} :

$$d = \ell + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \quad \text{et} \quad D = \ell + 2|\Sigma_r^+|,$$

1. Dans certaines littératures, les auteurs ont mis l'accent sur la différence entre \mathfrak{a} et son espace dual \mathfrak{a}^* . On note que la structure particulière de \mathfrak{a}^* ne joue aucun rôle dans notre contexte. Grâce au produit scalaire introduit ci-dessus, on peut identifier tout sous-espace de \mathfrak{g} avec son espace dual.

2. Helgason choisit la convention $\frac{\alpha}{2} \notin \Sigma^+$.

où $|\Sigma_r^+|$ est le cardinal de l'ensemble des racines positives réduites. Il n'est pas possible de comparer d et D sans préciser la structure géométrique de \mathbb{X} . Par exemple, en rang un, $D = 3$ est fixé, mais $d \geq 2$ est arbitrairement grand ; lorsque G est complexe, on a $d = D$; dans le cas où \mathbb{X} est une forme réelle normale, $d = \ell + |\Sigma_r^+|$ est plus petit que D .

Exemple 1.1.2. (*Espaces symétriques de rang un*). Un espace symétrique de rang un est l'un des quatre types d'espace hyperbolique : $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, $\mathbf{H}^n(\mathbb{C})$, $\mathbf{H}^n(\mathbb{H})$ ou $\mathbf{H}^2(\mathbb{O})$, où \mathbb{H} (resp. \mathbb{O}) désigne le corps des quaternions (resp. octonions).

\mathbb{X}	$\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$	$\mathbf{H}^n(\mathbb{C})$	$\mathbf{H}^n(\mathbb{H})$	$\mathbf{H}^2(\mathbb{O})$
G	$\mathrm{SO}_0(n, 1)$	$\mathrm{SU}(n, 1)$	$\mathrm{Sp}(n, 1)$	$\mathrm{F}_{4(-20)}$
K	$\mathrm{SO}(n)$	$\mathrm{S}[\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1)]$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{Spin}(9)$
m_1	$n - 1$	$2(n - 1)$	$4(n - 1)$	8
m_2	0	1	3	7
d	n	$2n$	$4n$	16
ρ	$\frac{n-1}{2}$	n	$2n + 1$	11

TABLEAU 1.1 – Espaces symétriques de rang 1.

Ici $\mathrm{F}_{4(-20)}$ est un groupe de Lie non compact exceptionnel, $\mathrm{Spin}(9)$ un groupe spinoriel de dimension 9 et $\mathrm{SO}_0(n, 1)$ est la composante connexe, qui contient l'identité, du groupe orthogonal de Lorentz

$$\mathrm{SO}(n, 1) = \left\{ g \in \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R}) \mid g \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^T = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le groupe unitaire et le groupe symplectique de Lorentz sont définis de la façon similaire. Lorsque $\ell = 1$, \mathfrak{a} est identifié avec l'espace euclidien \mathbb{R} , l'ensemble des racines positives réduites Σ_r^+ ne contient qu'une seule racine, alors $D = 3$ et le seul espace symétrique de rang un avec G complexe est l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$.

Exemple 1.1.3. (*Matrices spéciales définies positives*). Soient $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ and $K = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, alors $\mathbb{X} = G/K$ est un espace symétrique non compact de rang $n - 1$ et de dimension

$$\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

\mathbb{X} consiste en les $n \times n$ matrices définies positives de déterminant 1. Par exemple, lorsque $n = 3$,

$$\mathfrak{a} = \{ \mathrm{diag}(r_1, r_2, r_3) \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}, r_1 + r_2 + r_3 = 0 \}$$

est un ensemble des matrices diagonales de trace 0. Le système de racines de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ dans \mathfrak{a} est A_2 :

$$\Sigma = \{ e_i - e_j, 1 \leq i \neq j \leq 3 \}.$$

Le système de racines positives comprends trois éléments :

$$\Sigma^+ = \{ e_i - e_j, 1 \leq i < j \leq 3 \} = \underbrace{\{ \mathrm{diag}(1, -1, 0) \}}_{\alpha}, \underbrace{\{ \mathrm{diag}(0, 1, -1) \}}_{\beta}, \underbrace{\{ \mathrm{diag}(1, 0, -1) \}}_{\alpha+\beta}$$

et le système de racines simples est $\Sigma_s = \{ \alpha, \beta \}$. La chambre de Weyl positive associé au système Σ^+ est donné par

$$\mathfrak{a}^+ = \{ \mathrm{diag}(r_1, r_2, r_3) \in \mathfrak{a} \mid r_1 > r_2 > r_3 \}$$

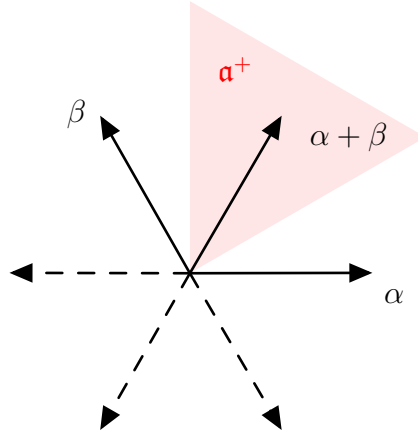


FIGURE 1.2 – Système de racines A_2 .

Décomposition des groupes de Lie semi-simples. La *décomposition de Cartan* au niveau du groupe de Lie s'écrit :

$$G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}^+})K.$$

Elle provient de la décomposition polaire $G = K \exp \mathfrak{p}$, dans laquelle l'application $(k, X) \mapsto k \exp X$ est un difféomorphisme de $K \times \mathfrak{p}$ sur G . La décomposition de Cartan joue un rôle important dans les études sur les espaces symétriques : pour chaque élément $g \in G$, il existe toujours $k_1, k_2 \in K$ et $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ tels que $g = k_1(\exp H)k_2$. Autrement dit, nous pouvons simplifier le problème concernant les fonctions K -bi-invariantes en passant d'un espace symétrique au sous-espace euclidien \mathfrak{a} . Par ailleurs, la mesure de Haar sur G s'écrit

$$\int_G dg f(g) = \text{const.} \int_K dk_1 \int_{\mathfrak{a}^+} dH \delta(H) \int_K dk_2 f(k_1(\exp H)k_2),$$

avec la densité

$$\delta(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\sinh \langle \alpha, H \rangle)^{m_\alpha} \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{\langle \alpha, H \rangle}{1 + \langle \alpha, H \rangle} \right\}^{m_\alpha} e^{\langle 2\rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

Ici, la constante a été calculée explicitement dans [AnJi99, p.1041].

Désignons par N le sous-groupe de Lie de G associé à la sous-algèbre nilpotente

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

La *décomposition d'Iwasawa*

$$G = N(\exp \mathfrak{a})K$$

généralise la façon dont une matrice réelle carrée peut être écrite comme produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice orthogonale. Dans cette décomposition, l'application $(n, a, k) \mapsto nak$ est un difféomorphisme de $N \times A \times K$ sur G . Nous n'utilisons pas directement cette décomposition dans la suite, mais sa \mathfrak{a} -composante intervient dans la formule intégrale des fonctions sphériques.

Série de Poincaré. On peut estimer certains noyaux sur les espaces localement symétriques en utilisant les estimations du noyau obtenues sur les espace symétriques. L'exemple le plus simple est *série de Poincaré* qui est définie par

$$P_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)} \quad \forall s > 0, \forall x, y \in \mathbb{X}. \quad (1.1)$$

Remarquons que $P_s(x, y)$ est Γ -invariante au sens que $P_s(x, y) = P_s(\gamma_1 x, \gamma_2 y)$ pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, alors $P_s(x, y)$ est aussi considérée comme une fonction définie sur $\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$. Nous désignons par

$$\delta(\Gamma) = \inf\{s > 0 \mid P_s(x, y) < +\infty\}$$

son *exposant critique*. Comme $\Gamma \subset G$ est un sous-groupe discret d'isométries, une application de l'inégalité triangulaire implique que la valeur de l'exposant critique $\delta(\Gamma)$ ne dépend pas du choix des points $x, y \in \mathbb{X}$. Nous pouvons aussi la définir par

$$\delta(\Gamma) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log N_R(x, y)}{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$$

en utilisant la *fonction de comptage orbitale*

$$N_R(x, y) = |\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma y) \leq R\}|.$$

Autrement dit, $\delta(\Gamma)$ mesure le taux de croissance exponentiel des orbites de Γ en \mathbb{X} . Il est bien connu que $\delta(\Gamma) \in [0, 2|\rho|]$, et $\delta(\Gamma)$ atteint son maximum si Γ est un réseau, c'est-à-dire $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ est de volume fini, voir [Alb99].

Dans le cas de rang un, $\mathbb{X} = \mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ est un espace hyperbolique, où $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou \mathbb{O} (dans ce cas $n = 2$), voir [Exemple 1.1.2](#). Nous désignons par $\partial\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ la sphère à l'infini de $\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ qui est identifiée avec une sphère $(d - 1)$ -dimensionnelle. Fixons un point $x \in \mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ quelconque, l'*ensemble limite* Λ_Γ du sous-groupe discret Γ est donné par

$$\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma \cdot x} \cap \partial\mathbf{H}^n(\mathbb{F}).$$

Désignons par $\text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ l'*enveloppe convexe* dans $\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ de l'ensemble limite Λ_Γ . Alors Γ est dit *convexe cocompact* si le groupe quotient $\Gamma \backslash \text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ est compact. Dans ce cas, pour tout $s > \delta(\Gamma)$, il existe $C > 0$ tel que

$$P_s(x, y) \leq CP_s(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad \forall x, y \in \mathbf{H}^n(\mathbb{F}),$$

c'est-à-dire que la série de Poincaré est uniformément bornée, voir [Lemma 4.3.3](#).

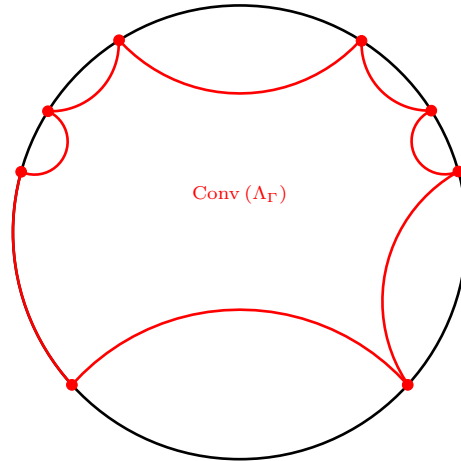


FIGURE 1.3 – Enveloppe convexe dans $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ de l'ensemble limite Λ_Γ .

1.1.2 Décomposition barycentrique de la chambre de Weyl

Nous présentons dans cette partie l'idée de la *décomposition barycentrique* pour la chambre de Weyl, voir Sect. 3.2.3 pour les propriétés détaillées. Cette méthode nous permet de surmonter une difficulté bien connue dans l'analyse sur les espaces symétriques de rang supérieur : la densité de Plancherel n'est pas un symbole différentiel en général. Soient $\Sigma_s = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ le système des racines simples et $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell\}$ sa base duale dans \mathfrak{a} , qui est définie par

$$\langle \alpha_j, \Lambda_k \rangle = \delta_{jk} \quad \forall 1 \leq j, k \leq \ell.$$

Remarquons que $\overline{\mathfrak{a}^+} = \mathbb{R}^+ \Lambda_1 + \dots + \mathbb{R}^+ \Lambda_\ell$. Nous rappelons

$$\begin{cases} \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle \leq 0 & \forall 1 \leq j \neq k \leq \ell, \\ \langle \Lambda_j, \Lambda_k \rangle \geq 0 & \forall 1 \leq j, k \leq \ell. \end{cases}$$

Désignons par \mathfrak{B} l'enveloppe convexe de $W.\Lambda_1 \sqcup \dots \sqcup W.\Lambda_\ell$ et par \mathfrak{S} sa frontière polyédrique. Alors $\mathfrak{B} \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$ est le ℓ -simplexe de sommets $0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell$, et $\mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$ est le $(\ell - 1)$ -simplexe de sommets $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell$. Le pavage suivant est obtenu en regroupant les subdivisions barycentriques des simplexe $\mathfrak{S} \cap w.\mathfrak{a}^+$:

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{w \in W} \bigcup_{1 \leq j \leq \ell} w.\mathfrak{S}_j$$

où

$$\mathfrak{S}_j = \{\lambda \in \mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{a}^+} \mid \langle \alpha_j, \lambda \rangle = \max_{1 \leq k \leq \ell} \langle \alpha_k, \lambda \rangle\}.$$

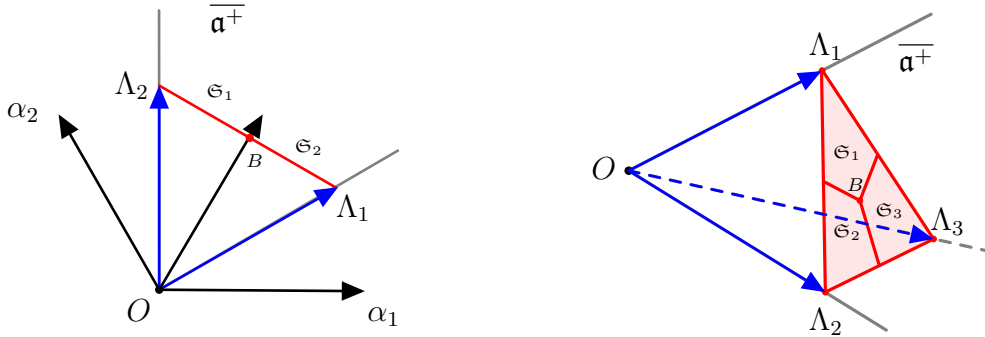


FIGURE 1.4 – Exemples des subdivisions barycentriques dans A_2 et dans A_3 .

Les vecteurs dans \mathfrak{S} ont les propriétés importantes qui nous permettent de manipuler la densité de Plancherel en rang supérieur. Mais cela ne sert pas directement aux calculs suivants, il faut trouver les bonnes fonctions plateaux lisses convenables pour lesquelles nous pouvons faire l'analyse. Pour cette raison, nous projetons le pavé \mathfrak{S} sur la sphère unité :

$$S(\mathfrak{a}) = \bigcup_{w \in W} \bigcup_{1 \leq j \leq \ell} w.S_j$$

où S_j sont les projections des subdivisions barycentriques \mathfrak{S}_j sur la sphère unité. Nous établissons une version lisse de la partition de l'unité

$$\sum_{w \in W} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \mathbf{1}_{w.S_j} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \right) = 1 \quad \text{p.p.}$$

de la façon suivante : considérons une fonction plateau lisse $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle que $\chi(r) = 1$ lorsque $r \geq 0$ et $\chi(r) = 0$ lorsque $r \leq -c_1$ pour une constante $c_1 > 0$ à spécifier, nous supposons

$$\tilde{\chi}_{w.S_j}(\lambda) = \prod_{1 \leq k \leq \ell, k \neq j} \chi\left(\frac{\langle w.\alpha_k, \lambda \rangle}{|\lambda|}\right) \chi\left(\frac{\langle w.\alpha_j, \lambda \rangle - \langle w.\alpha_k, \lambda \rangle}{|\lambda|}\right) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a} \setminus \{0\},$$

pour chaque $w \in W$ et $1 \leq j \leq \ell$.

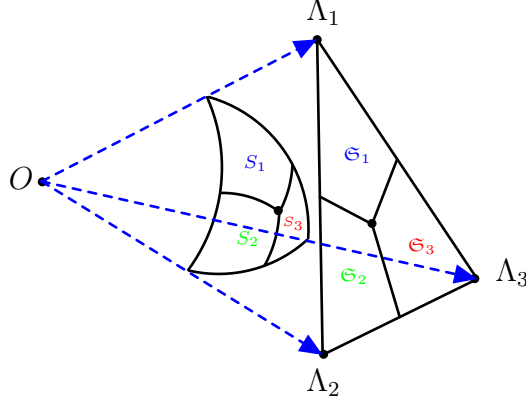


FIGURE 1.5 – Exemple de la projection dans A_3 .

Alors

$$\tilde{\chi} = \sum_{w \in W} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \tilde{\chi}_{w.S_j}$$

est une fonction W -invariante et non nulle sur $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$. De plus, $\tilde{\chi}$ est un symbole homogène d'ordre 0. Désignons par

$$\chi_{w.S_j} = \frac{\tilde{\chi}_{w.S_j}}{\tilde{\chi}} \quad \text{sur } \mathfrak{a} \setminus \{0\},$$

nous obtenons enfin

$$\sum_{w \in W} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \chi_{w.S_j} = 1 \quad \text{sur } \mathfrak{a} \setminus \{0\}. \quad (1.2)$$

On verra que, dans le support de chaque $\chi_{w.S_j}$, la densité de Plancherel devient un symbole différentiel lorsqu'on la dérive dans la direction $w.\Lambda_j$.

1.1.3 Analyse harmonique sur les espaces symétriques

Désignons par $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ l'espace de Schwartz des fonctions K -bi-invariantes sur G et par $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$ le sous-espace des fonctions W -invariantes dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$. La transformation de Fourier sphérique \mathcal{H} , définie par

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_G dx \varphi_{-\lambda}(x) f(x) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}, \forall f \in \mathcal{S}(K \backslash G / K),$$

est un isomorphisme entre $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$. La transformation de Fourier sphérique inverse est donnée par

$$f(x) = C_0 \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathfrak{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_{\lambda}(x) \mathcal{H}f(\lambda) \quad \forall x \in G, \forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W \quad (1.3)$$

où $C_0 > 0$ est une constante dépendant uniquement de la structure géométrique de \mathbb{X} , qui a été calculée explicitement, par exemple, dans [GaVa88, Theorem 6.4.1] et [AnJi99, Theorem 2.2.2]. Nous parlons de la fonction sphérique $\varphi_{\lambda}(x)$ et de la fonction de Harish-Chandra $\mathfrak{c}(\lambda)$ dans les paragraphes suivants.

Fonctions sphériques. De même que le noyau exponentiel $e^{\langle \lambda, x \rangle}$ dans la théorie de Fourier euclidienne, la fonction sphérique φ_λ joue un rôle essentiel dans l'analyse harmonique sur les espaces symétriques. Pour chaque $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$, φ_λ est une fonction propre K -bi-invariante régulière pour tous les opérateurs différentiels invariants sur \mathbb{X} , en particulier pour le laplacien :

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{X}}\varphi_\lambda(x) = (|\lambda|^2 + |\rho|^2)\varphi_\lambda(x), \\ \varphi_\lambda(\mathbf{0}) = 1. \end{cases}$$

Dans le cas non compact, la fonction sphérique est donnée par la formule intégrale

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K dk e^{i\langle \lambda + \rho, A(kx) \rangle} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

où $A(kx)$ est la \mathfrak{a} -composante unique de kx dans la décomposition d'Iwasawa $G = N(\exp \mathfrak{a})K$, voir [Hel00, p.418]. Le comportement de φ_λ a été étudié par Harish-Chandra et par Trombi et Varadarajan (voir [GaVa88] et [AnJi99]). Nous avons juste besoin de l'estimation élémentaire

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq \varphi_0(x) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

où

$$\varphi_0(\exp H) \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} 1 + \langle \alpha, H \rangle \right\} e^{-\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

Fonction \mathbf{c} de Harish-Chandra et densité de Plancherel. Nous évitons d'introduire l'expression intégrale (compliquée) de la fonction \mathbf{c} de Harish-Chandra. D'après la formule explicite de Gindikin et Karpelevič, voir par exemple [DKV79, pp.43-50] et [AnJi99, pp.1041], cette fonction est donnée par

$$\mathbf{c}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} \mathbf{c}_\alpha \left(\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a},$$

où

$$\mathbf{c}_\alpha(v) = \frac{\Gamma\left(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{1}{2}m_\alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{1}{4}m_\alpha + \frac{1}{2}m_{2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{1}{4}m_\alpha\right)} \frac{\Gamma(iv)}{\Gamma(iv + \frac{1}{2}m_\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{i}{2}v + \frac{1}{4}m_\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}v + \frac{1}{4}m_\alpha + \frac{1}{2}m_{2\alpha}\right)}$$

est un symbole inhomogène sur \mathbb{R} d'ordre $m_\alpha + m_{2\alpha}$ pour chaque $\alpha \in \Sigma_r^+$. La densité de Plancherel $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ est donc un produit de symboles unidimensionnels, mais pas un symbole sur \mathfrak{a} en général, voir par exemple [Hel92 ; BOS95] où les auteurs ont étudié le principe de Huygens sur certains espaces symétriques et ont expliqué cette difficulté technique pour le cas général. Nous pouvons également écrire $\mathbf{c}(\lambda) = \mathbf{b}(\lambda)\pi(i\lambda)^{-1}$ avec

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} \langle \alpha, \lambda \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{b}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} \mathbf{b}_\alpha \left(\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)$$

où $\mathbf{b}_\alpha(v) = |\alpha|^2 i v \mathbf{c}_\alpha(v)$. Nous savons que $\pi(\lambda)$ est un symbole homogène d'ordre $|\Sigma_r^+|$, mais $\mathbf{b}(\lambda)$ ne l'est pas en général. En fait, toutes les dérivées de $\mathbf{b}(\lambda)^{\pm 1}$ sont majorées par

$$|\mathbf{b}(\lambda)|^{\pm 1} \asymp \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} (1 + |\langle \alpha, \lambda \rangle|)^{\pm 1 \mp \frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2}} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a} - i\overline{\mathfrak{a}^+}.$$

En conséquence, la densité de Plancherel satisfait le comportement asymptotique

$$|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} = \pi(\lambda)^2 |\mathbf{b}(\lambda)|^{-2} \asymp \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} \langle \alpha, \lambda \rangle^2 (1 + |\langle \alpha, \lambda \rangle|)^{m_\alpha + m_{2\alpha} - 2} \lesssim \begin{cases} |\lambda|^{D-\ell} & \text{si } |\lambda| \leq 1, \\ |\lambda|^{d-\ell} & \text{si } |\lambda| \geq 1. \end{cases}$$

En utilisant la décomposition barycentrique (1.2), $\chi_{w.S_j}(\lambda)|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ devient un symbole inhomogène quand on la dérive dans la direction $\omega.\Lambda_j$. Cette technique nous permet d'estimer le noyau des ondes sur les espaces symétriques de rang supérieur, voir Chap. 3.

Exemple 1.1.4. Lorsque G est complexe, l'analyse sur les espaces symétriques $\mathbb{X} = G/K$ devient plus simple grâce aux expressions élémentaires de la fonction sphérique et de la densité de Plancherel. Dans ce cas, toutes les racines sont réduites, alors $\Sigma_r^+ = \Sigma^+$. Pour chaque racine $\alpha \in \Sigma^+$, on a toujours $m_\alpha = 2$, donc $\rho = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$. En plus, la densité de Plancherel devient

$$|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} = \pi(\lambda)^2 = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \alpha, \lambda \rangle^2,$$

qui est un polynôme homogène de degré $d - \ell$. Selon [Hel00, Chap IV, Theorem 4.7], la fonction sphérique pour G complexe est également donnée par

$$\varphi_\lambda(\exp X) = J^{-1/2}(X) \int_K dk e^{i\langle (\text{Ad } k) \cdot \lambda, x \rangle} \quad \forall X \in \mathfrak{p},$$

où J désigne le jacobien de l'application exponentielle de \mathfrak{p} équipé de la mesure de Lebesgue à \mathbb{X} équipé de la mesure riemannienne. Il est définie par

$$J(X) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left(\frac{\sinh \langle \alpha, X \rangle}{\langle \alpha, X \rangle} \right)^{m_\alpha} \quad \forall X \in \mathfrak{p}, \quad (1.4)$$

alors

$$J(H)^{-1/2} = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left(\frac{\langle \alpha, H \rangle}{\sinh \langle \alpha, H \rangle} \right)^{\frac{m_\alpha}{2}} \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (1 + \langle \alpha, H \rangle)^{\frac{m_\alpha}{2}} \right\} e^{-\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}. \quad (1.5)$$

Remarquons que $J(H)^{-1/2} = \varphi_0(\exp H)$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$ lorsque G est complexe. Nous pouvons écrire la formule inverse de la transformation de Fourier sphérique comme

$$f(x) = \text{const.} \int_{\mathfrak{p}} d\lambda \mathcal{H}f(\lambda) e^{-i\langle (\text{Ad } k) \cdot \lambda, x \rangle} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W.$$

Cette formule est utilisée dans Chap. 2 pour estimer le noyau des ondes dans le cas où G est complexe.

1.1.4 Outils d'analyse fonctionnelle sur les espaces symétriques

À la fin de cette section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces fonctionnels que nous utilisons fréquemment dans cette thèse. Les références générales sont [Ste70b; BeL76; Tri92], nous nous aussi référons à [Ank90; Ank92] pour l'analyse sur les espaces symétriques.

Espace de Sobolev. Soient $\sigma \in \mathbb{R}$ et $1 < q < +\infty$. Nous désignons par $H^{\sigma,q}(\mathbb{X})$ l'image de $L^q(\mathbb{X})$ sous l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}}$ équipé de la norme

$$\|f\|_{H^{\sigma,q}(\mathbb{X})} = \|(-\Delta_{\mathbb{X}})^{\frac{\sigma}{2}} f\|_{L^q(\mathbb{X})}.$$

Lorsque $\sigma = N$ est un entier naturel, $H^{N,q}(\mathbb{X})$ coïncide avec l'espace de Sobolev classique

$$W^{N,q}(\mathbb{X}) = \{f \in L^q(\mathbb{X}) \mid \nabla^j f \in L^q(\mathbb{X}) \quad \forall j \in [1, N]\}$$

défini au moyen des dérivées covariantes. Nous écrivons $H^\sigma(\mathbb{X})$ au lieu de $H^{\sigma,2}(\mathbb{X})$ pour simplifier la notation. Les deux versions suivantes du plongement de Sobolev seront utilisés. Le premier est standard, il sert à élargir la famille des paries admissibles pour l'inégalité de Strichartz. Le deuxième concerne les fonctions K -bi-invariantes sur \mathbb{X} , nous en avons besoin pour estimer le développement asymptotique du noyau.

Théorème 1.1.5 (Plongement de Sobolev). Soient $1 < p_1, p_2 < +\infty$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma_1 - \sigma_2 \geq \frac{d}{q_1} - \frac{d}{q_2} \geq 0.$$

Alors $H^{\sigma_1, q_1}(\mathbb{X}) \subset H^{\sigma_2, q_2}(\mathbb{X})$. Autrement dit, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{H^{\sigma_2, q_2}(\mathbb{X})} \leq C \|f\|_{H^{\sigma_1, q_1}(\mathbb{X})},$$

pour toute fonction f raisonnable sur \mathbb{X} .

Théorème 1.1.6 (Plongement de Sobolev pour les fonctions K -bi-invariantes, [Ank92, Lemma 2.3]). Soit $\sigma > \frac{d}{2}$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(\exp x^+)| \leq C e^{-\langle \rho, x^+ \rangle} \|f\|_{H^\sigma(\mathbb{X})} \quad \forall f \in H^\sigma(K \backslash G / K)$$

où $x^+ \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ désigne la composante radiale de x dans la décomposition de Cartan.

Phénomène de Kunze-Stein.³ Le phénomène de Kunze-Stein concerne le comportement par rapport aux espaces L^p du produit de convolution sur les groupes de Lie semi-simples, voir [KuSt60; Cow78; Ion00a]. C'est un outil important pour l'obtention d'inégalités dispersives sur les espaces symétriques. Nous aurons besoin d'une version particulière de ce phénomène pour les fonctions K -bi-invariantes. Le théorème suivant a été établi par Stein [Ste70a] et par Herz [Her70] pour $q = 2$. Pour $q > 2$, nous obtenons le résultat suivant en reprenant la démonstration de [APV11, Théorème 4.2] dans le cas des espaces de Damek-Ricci.

Théorème 1.1.7 (Phénomène de Kunze-Stein pour les fonctions K -bi-invariantes). Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(K \backslash G / K)$. Alors

$$\|\cdot * f\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \leq \left\{ \int_G dx \varphi_0(x) |f(x)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}}$$

pour tout $2 \leq q < \infty$.

Ce phénomène a été étendu à certaines classes d'espaces localement symétriques [LoMa09; LoMa14]. Dans Chap. 4, nous établissons une version L^2 du phénomène de Kunze-Stein sur $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ dans le cas où \mathbb{X} est un espace symétrique de rang un et $\delta(\Gamma) < \rho$.

Théorème 1.1.8 (Phénomène de Kunze-Stein sur \mathbb{Y}). Supposons que \mathbb{X} est un espace symétrique de rang un et $\delta(\Gamma) < \rho$. Alors

$$\|\cdot * f\|_{L^2(\mathbb{Y}) \rightarrow L^2(\mathbb{Y})} \leq \int_G dx \varphi_0(x) |f(x)|$$

pour toute fonction f raisonnable et K -bi-invariante dans G .

Interpolation de Stein. Le théorème d'interpolation de Stein, qui généralise le résultat classique de Riesz-Thorin, est un résultat utile pour une famille analytique d'opérateurs. Ce tout premier résultat de Stein est encore très fréquemment utilisés aujourd'hui dans l'analyse mathématique. Dans cette thèse, il est un ingrédient indispensable pour établir la propriété de dispersion.

Théorème 1.1.9 (Théorème d'interpolation de Stein, [Ste56]). Supposons que T_σ est un opérateur qui dépend analytiquement de σ dans la bande $0 \leq \text{Re } \sigma \leq 1$. Si T_σ est uniformément borné de $L^{p_1}(\mathbb{X})$ dans $L^{q_1}(\mathbb{X})$ quand $\text{Re } \sigma = 0$, et de $L^{p_2}(\mathbb{X})$ dans $L^{q_2}(\mathbb{X})$ quand $\text{Re } \sigma = 1$, alors T_θ est borné de $L^{p_\theta}(\mathbb{X})$ dans $L^{q_\theta}(\mathbb{X})$ avec $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$, $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}$ et $0 \leq \theta \leq 1$.

1.2 Principaux résultats obtenus

Nous énonçons les résultats obtenus dans cette thèse. La première partie concerne l'équation des ondes sur les espaces symétriques non compacts de rang supérieur. Après avoir établi les estimations ponctuelles du noyau, les propriétés de dispersion et les inégalités de Strichartz, nous démontrons que l'équation des ondes semi-linéaire correspondante est globalement bien posée avec les données initiales de régularité faible. Cela généralise les résultats précédemment obtenus sur les espaces symétriques de rang un. Nous examinons des problèmes d'analyse sur les espaces localement symétriques dans la seconde partie. D'une part, nous étudions les équations des ondes et de Klein-Gordon sur une classe d'espaces localement symétriques de rang un. D'autre part, nous caractérisons le bas du spectre L^2 de $-\Delta_{\mathbb{Y}}$ sur les espaces localement symétriques de rang supérieur.

3. Nous nous référons à [Fef95] pour un résumé des travaux de E.M. Stein et de ses collaborateurs.

1.2.1 Équation des onde sur \mathbb{X}

Nous adoptons le même stratégie que dans le cas euclidien : après avoir trouvé les estimations ponctuelles du noyau, on en déduit les propriétés dispersives selon un argument d'interpolation ; ensuite nous établissons l'inégalité de Strichartz en utilisant la méthode TT^* classique et la décomposition dyadique de Keel-Tao pour le point critique ; enfin, nous étudions le problème de Cauchy semi-linéaire correspondant par le schéma du point fixe reposant sur l'inégalité de Strichartz. Comme les résultats concernés sont bien connus en rang un, nous nous concentrons sur le cas des espaces symétriques de rang supérieur. Lorsque $\ell \geq 2$, nous avons à la fois $d \geq 4$ et $D \geq 4$ selon (3.2). Cela nous permet d'éviter le cas 2-dimensionnel, où les estimations contiennent des termes logarithmiques additionnels.

Estimation ponctuelle du noyau. Afin de simplifier les énoncés et d'éviter les singularités éventuelles, nous considérons la famille analytique d'opérateurs sur \mathbb{X} :

$$\widetilde{W}_t^\sigma = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} (-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$$

dans la bande verticale $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$. Cette technique classique a déjà été utilisée pour l'opérateur des ondes sur les espaces hyperboliques, voir [APV12 ; AnPi14]. La fonction $\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)$, qui apparaît naturellement dans la théorie des distributions de Riesz, nous permet de traiter le point critique $\sigma = \frac{d+1}{2}$, tandis que la fonction exponentielle permet de borner les expressions dans la bande verticale. Nous nous référons à [Ste93, Chap 9] pour plus de détails sur cette technique.

Désignons par $\widetilde{\omega}_t^\sigma$ le noyau de convolution K -bi-invariant de \widetilde{W}_t^σ :

$$\widetilde{W}_t^\sigma f(x) = f * \widetilde{\omega}_t^\sigma(x) = \int_G dy \widetilde{\omega}_t^\sigma(y^{-1}x) f(y)$$

où f est une fonction raisonnable définie sur \mathbb{X} . Selon la formule d'inversion de Fourier sphérique (1.3),

$$\widetilde{\omega}_t^\sigma(x) = \text{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathfrak{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(x) (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}}.$$

Observons que l'approche réalisée sur les espaces hyperboliques peut être étendue aux espaces symétriques de rang supérieur avec G complexe, mais ne fonctionne plus pour G réel, parce que la densité de Plancherel n'est pas toujours un symbole différentiel en général. Afin d'étudier une telle intégrale oscillante, nous avons besoin de la diviser en plusieurs morceaux selon que $|\lambda|$, $|t|$ et $\frac{|x|}{|t|}$ sont petits ou grands, et puis nous étudions respectivement chaque morceau par un argument différent. Hormis la méthode standard de la phase stationnaire, nous avons encore besoin de la paramétrix de Hadamard [Bér77 ; CGM01] et de la décomposition barycentrique de la chambre de Weyl (Sect. 1.1.2). L'énoncé suivant, qui regroupe les estimations obtenues dans chaque cas différent, nous permet de présenter clairement le résultat. Pour établir la propriété de dispersion, il faut reprendre les estimations précises (voir Theorem 3.3.5, Theorem 3.3.9 et Theorem 3.3.12).

Théorème I (Estimation ponctuelle du noyau). *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$, l'estimation suivante est valable pour tout $x \in \mathbb{X}$:*

$$|\widetilde{\omega}_t^\sigma(x)| \lesssim (1 + |x^+|)^N e^{-\langle \rho, x^+ \rangle} \begin{cases} |t|^{-\frac{d-1}{2}} & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{D}{2}} & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

où $x^+ \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ désigne la composante radiale de x dans la décomposition de Cartan.

Nous conjecturons que ces estimations sont optimales en temps et la condition de régularité est bien critique. Notons que l'analyse du noyau est plus simple lorsque $\operatorname{Re} \sigma > \frac{d+1}{2}$. La puissance N de la partie polynomiale sera précisée pour chaque cas différent.

En temps petit, les estimations sont semblables sur les espaces euclidiens, les espaces hyperboliques et les espaces symétriques de rang supérieur. Mais en temps grand, ça devient complètement différent. Sur un espace euclidien d -dimensionnel, la décroissance en temps grand est identique à celle en temps petit. Sur un espace symétrique de rang un, la décroissance en temps grand est $|t|^{-\frac{d}{2}}$.

Propriété de dispersion. Une fois les estimations ponctuelles du noyau établies, les étapes suivantes sont similaires à celles sur l'espace hyperbolique réel. En utilisant le phénomène de Kunze-Stein et l'argument d'interpolation pour la famille analytique d'opérateurs \widetilde{W}_t^σ dans la bande verticale $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$, nous déduisons les propriétés de dispersion suivantes.

Théorème II (Propriété de dispersion). *Soient $2 \leq q, \tilde{q} < +\infty$ et $\sigma \geq (d+1) \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}\}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que les inégalités dispersives suivantes sont valables :*

$$\|W_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \leq C \begin{cases} |t|^{-(d-1) \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}\}} & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{d}{2}} & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

En comparaison avec la propriété dispersive sur l'espace euclidien

$$\|W_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim |t|^{-(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*,$$

l'estimation en temps petit est essentiellement identique, mais celle en temps grand est considérablement améliorée, au sens où on obtient une forte décroissance qui ne dépend ni de q ni de \tilde{q} . Cela nous permet d'établir l'inégalité de Strichartz globale pour une grande famille de paires admissibles.

Inégalité de Strichartz. Considérer le problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{X}} u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.6)$$

dont la solution est donnée par la formule de Duhamel :

$$u(t, x) = (\cos t \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}) u_0(x) + \frac{\sin t \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}} u_1(x) + \int_0^t ds \frac{\sin(t-s) \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}} F(s, x).$$

L'inégalité de Strichartz globale s'exprime au moyen de la norme temps-espace mélangée :

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}; H^{-\sigma, q}(\mathbb{X}))} = \left(\int_{\mathbb{R}} dt \|(-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{X})}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

des données initiales et de la partie inhomogène F . En utilisant la méthode TT^* classique basée sur la propriété de dispersion **Théorème II**, nous l'établissons pour une grande famille de *paires admissibles* : une paire (p, q) est appelée admissible si $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ appartient au triangle

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{2} \right] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} \geq \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (1.7)$$

Théorème III (Inégalité de Strichartz). *Soient (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) deux paires admissibles, et supposons*

$$\sigma \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma} \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right).$$

Alors toute solution u du problème de Cauchy linéaire (1.6) satisfait l'estimation suivante :

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{X}} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{X}))} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{X})} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{X})} + \|F\|_{L^{\tilde{p}}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}}(\mathbb{X}))}. \quad (1.8)$$

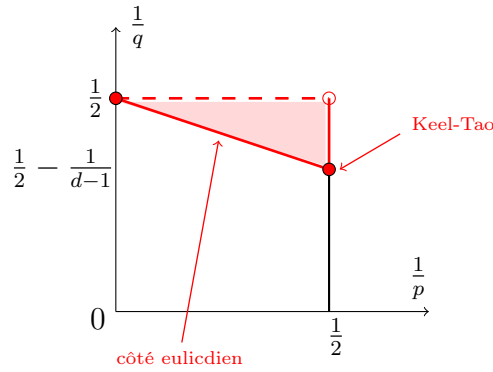


FIGURE 1.6 – Admissibilité en dimension $d \geq 4$.

En comparaison avec l'espace euclidien, ici nous avons les mêmes conditions de régularité pour σ et $\tilde{\sigma}$, mais la famille des paires admissibles pour l'espace symétrique est beaucoup plus large que celle pour \mathbb{R}^d , qui correspond juste au côté inférieur du triangle (1.7). Comme cela a déjà été observé sur l'espace hyperbolique réel, c'est une conséquence d'une meilleure dispersivité en courbure négative. Par rapport à l'espace hyperbolique, la propriété de dispersion **Théorème II** nous donne plus de décroissance en temps grand, mais cela n'améliore pas l'inégalité de Strichartz sur les espaces symétriques de rang supérieur. En fait, pour établir (1.8), il suffit d'avoir $|t|^{-1-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ dans l'estimation dispersive en temps grand.

De façon similaire à l'espace euclidien ou à l'espace hyperbolique, l'ensemble des paires admissibles (1.7) peut être élargi en utilisant le théorème du plongement de Sobolev **Théorème 1.1.5**.

Corollaire IV. Soient (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) deux paires correspondant au carré

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

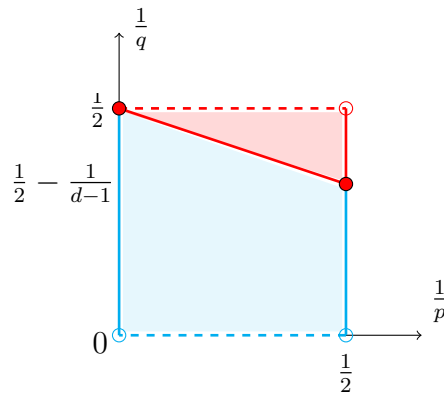


FIGURE 1.7 – Admissibilité étendue en dimension $d \geq 4$.

Supposons que $\sigma \in \mathbb{R}$ satisfait $\sigma \geq \sigma(p, q)$, où $\sigma(p, q) = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) + \max \left\{0, \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{p}\right\}$, et que $\tilde{\sigma} \geq \sigma(\tilde{p}, \tilde{q})$. Alors l'inégalité de Strichartz (1.8) est encore valable pour toute solution du problème de Cauchy linéaire (1.6).

Équation des ondes semi-linéaire. En utilisant l'inégalité de Strichartz établie ci-dessus et le schéma du point fixe, nous étudions le problème de Cauchy semi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{X}} u(t, x) = F_\gamma(u(t, x)), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.9)$$

avec une non linéarité de type puissance

$$|F_\gamma(u)| \lesssim |u|^\gamma \quad \text{et} \quad |F_\gamma(u) - F_\gamma(v)| \lesssim (|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1})|u - v| \quad (1.10)$$

où $\gamma > 1$. L'existence globale des solutions d'équations des ondes semi-linéaire sur \mathbb{R}^d fait l'objet de la conjecture de Strauss. Il s'agit de déterminer la puissance critique comme l'infimum de $\gamma \in (1, \gamma_c(d)]$ telle que le problème de Cauchy (1.9) ait une solution globale pour des données initiales petites. Ici

$$\gamma_c(d) = 1 + \frac{4}{d-1}$$

désigne la puissance conforme. Le premier résultat dans cette direction a été obtenu pour $d = 3$ [Joh79], où John a démontré l'existence globale pour $\gamma > 1 + \sqrt{2}$ et l'explosion pour $\gamma < 1 + \sqrt{2}$. Ensuite, Kato [Kat80] a indiqué que la solution globale n'existait pas pour $d = 1$ ou $1 < \gamma < 1 + \frac{2}{d-1}$. Strauss [Stra81] a conjecturé que la puissance critique $\gamma_0(d)$ pour $d \geq 2$ est la racine positive de l'équation quadratique

$$(d-1)\gamma_0^2 - (d+1)\gamma_0 - 2 = 0,$$

autrement dit,

$$\gamma_0(d) = \frac{1}{2} + \frac{1}{d-1} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right)^2 + \frac{2}{d-1}} > 1 \quad \forall d \geq 2.$$

La non-existence de solutions globales pour $1 < \gamma < \gamma_0(d)$ a été obtenue par Glassey [Gla81] ($d = 2$), John ($d = 3$) et Sideris [Sid84] ($d \geq 4$). La partie positive de la conjecture a été démontrée pour toute dimension en plusieurs étapes, voir par exemple les travaux [KIPo83; GLS97; Tat01] et les références qu'ils contiennent pour plus de détails sur la conjecture de Strauss dans le contexte euclidien.

En courbure négative, l'existence globale avec les données initiales petites a été prouvée, sur les espaces hyperboliques réels de dimension $d = 3$ [MeTa11; MeTa12] et puis de dimension $d \geq 2$ [AnPi14], pour tout $\gamma \in (1, \gamma_c(d)]$. C'est-à-dire que, sur ces espaces hyperboliques, il n'y pas de phénomène analogue à la conjecture de Strauss. Ensuite, les résultats similaires ont été étendue aux espaces de Damek-Ricci [APV15], qui contiennent tous les espaces symétriques de rang un. Récemment, l'existence globale est établie sur la variété riemannienne complète et simplement connexe avec la courbure sectionnelle strictement négative [SSW19], et sur les variétés asymptotiquement hyperboliques non-captivées [SSWZ19], où il y a le phénomène analogue comme sur les espaces hyperboliques. On note que ces résultats de l'existence globale sont aussi valables pour certaines puissances super-conformes $\gamma > \gamma_c(d)$.

En utilisant l'inégalité de Strichartz (Théorème III) avec une large famille de paires admissibles, nous étendons le résultat de l'existence globale obtenu sur l'espace hyperbolique réel [AnPi14] à tous les espaces symétriques non compacts de rang supérieur. Précisément, nous démontrons que le problème de Cauchy semi-linéaire (1.9) a une unique solution qui dépend de façon continue des données initiales petites, autrement dit, nous démontrons que (1.9) est *globalement bien posée* dans un espace fonctionnel raisonnable. Pour énoncer le théorème suivant, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Considérer les puissances

$$\gamma_1 = 1 + \frac{3}{d}, \quad \gamma_2 = 1 + \frac{2}{\frac{d-1}{2} + \frac{2}{d-1}}, \quad \gamma_3 = \begin{cases} 1 + \frac{4}{d-2} & \text{si } d \leq 5, \\ \frac{d-1}{2} + \frac{3}{d+1} - \sqrt{\left(\frac{d-3}{2} + \frac{3}{d+1}\right)^2 - 4\frac{d-1}{d+1}} & \text{si } d \geq 6, \end{cases}$$

et les courbes suivantes

$$\sigma_1(\gamma) = \frac{d+1}{4} - \frac{(d+1)(d+5)}{8d} \frac{1}{\gamma - \frac{d+1}{2d}}, \quad \sigma_2(\gamma) = \frac{d+1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad \sigma_3(\gamma) = \frac{d}{2} - \frac{2}{\gamma-1}.$$

Théorème V. *Le problème de Cauchy semi-linéaire (1.9) est globalement bien posé pour les données initiales petites dans $H^\sigma(\mathbb{X}) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{X})$ à condition que*

$$\begin{cases} \sigma > 0 & \text{si } 1 < \gamma \leq \gamma_1, \\ \sigma \geq \sigma_1(\gamma) & \text{si } \gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2, \\ \sigma \geq \sigma_2(\gamma) & \text{si } \gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_c(d), \\ \sigma \geq \sigma_3(\gamma) & \text{si } \gamma_c(d) \leq \gamma \leq \gamma_3. \end{cases} \quad (1.11)$$

Précisément, dans chaque cas, il existe $2 \leq p, q < +\infty$ tels que pour des données initiales petites $u_0 \in H^\sigma(\mathbb{X})$ et $u_1 \in H^{\sigma-1}(\mathbb{X})$, le problème de Cauchy (1.9) possède une unique solution dans l'espace de Banach

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}; H^\sigma(\mathbb{X})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; H^{\sigma-1}(\mathbb{X})) \cap L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{X})).$$

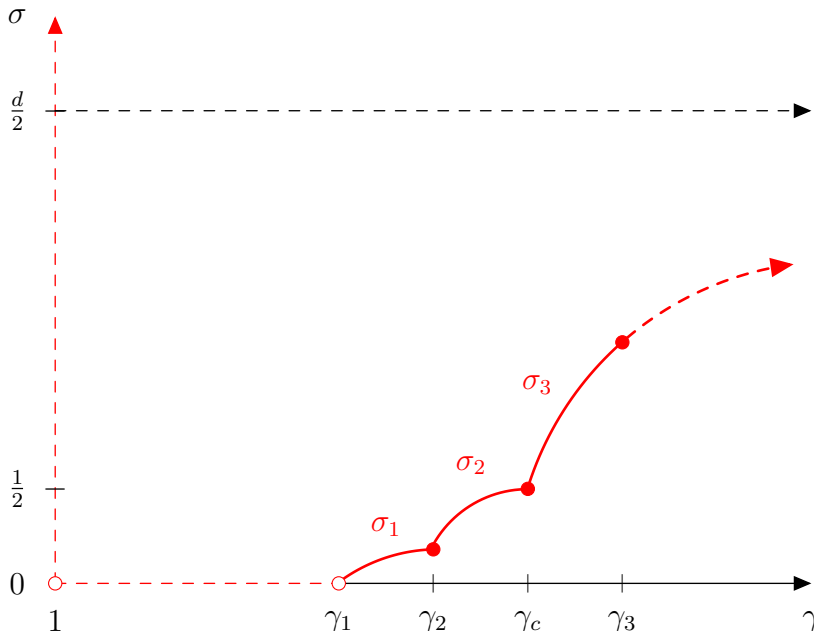


FIGURE 1.8 – Condition de régularité (1.11)

1.2.2 Équation des ondes sur certains espaces localement symétriques

Considérons l'opérateur pseudo-différentiel $\mathbf{D} = \sqrt{-\Delta_{\mathbb{Y}} - |\rho|^2 + \kappa^2}$ avec $\kappa \geq 0$. L'équation de Klein-Gordon

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \mathbf{D}_x^2 u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.12)$$

est bien comprise sur les espaces symétriques de rang un [AnPi14]. On note que (1.12) est une équation des ondes lorsque $\kappa = |\rho|$ et devient une équation des ondes shiftée lorsque $\kappa = 0$. Nous allons étendre les résultats obtenus sur l'espace symétrique \mathbb{X} à l'espace localement symétrique $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ sous les hypothèses suivantes :

- (a) \mathbb{X} est de rang un,
- (b) Γ est convexe cocompact,
- (c) $\delta(\Gamma) < \rho$.

Commentons ces hypothèses. Nous considérons les espaces symétriques de rang un parce que, d'une part, on dispose de bonnes estimations du noyau en rang un (maintenant aussi en rang supérieur); d'autre part, la condition de convexe cocompacté fournit une classe riche et intéressante d'exemples en rang un, mais par contre une classe assez limitée et moins intéressante en rang supérieur. La convexe cocompacté produit une borne supérieure uniforme de la série de Poincaré, qui est cruciale pour démontrer la propriété de dispersion. La *condition de pression* $\delta(\Gamma) < \rho$ a plusieurs conséquences : \mathbb{Y} est une variété de volume infini, son trou spectral $\lambda_0(\mathbb{Y}) = \rho^2$ est le même que \mathbb{X} , et \mathbb{Y} possède un phénomène de Kunze-Stein L^2 qui est essentiel pour la propriété de dispersion. Ce travail est inspiré par [FMM18], où les auteurs ont traité l'équation de Schrödinger sur une classe d'espaces localement symétriques vérifiant des conditions légèrement différentes.

Comme sur les espaces symétriques, nous désignons par $\tilde{\mathbf{D}} = \sqrt{-\Delta_{\mathbb{Y}} - |\rho|^2 + \tilde{\kappa}^2}$ avec $\tilde{\kappa} \geq 0$, et par $\tilde{\omega}_t^\sigma$ le noyau de convolution K -bi-invariant de l'opérateur

$$\tilde{W}_t^\sigma = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} \tilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\mathbf{D}}.$$

dans la bande verticale $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$. Le noyau sur \mathbb{Y} est exprimé comme une moyenne sur le groupe du noyau sur les espaces symétriques \mathbb{X} :

$$\hat{\omega}_t^\sigma(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{\omega}_t^\sigma(y^{-1}\gamma x) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}. \quad (1.13)$$

Lorsque $\delta(\Gamma) < \rho$, l'opérateur des ondes associé à ce noyau possède l'expression intégrale :

$$\widehat{W}_t^\sigma f(x) = \int_{\mathbb{Y}} dy \hat{\omega}_t^\sigma(x, y) f(y) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{Y})$$

(voir Proposition 4.3.1). Comme sur les espaces symétriques \mathbb{X} , nous démontrons une propriété de dispersion et établissons une inégalité de Strichartz pour une grande famille des paires admissibles sur les espaces localement symétriques \mathbb{Y} vérifiant les trois conditions (a), (b) et (c).

Théorème VI (Propreté de dispersion sur \mathbb{Y}). *Soient $d \geq 3$, $2 \leq q < +\infty$ et $\sigma \geq (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|\widehat{W}_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \leq C \begin{cases} |t|^{-(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Remarque 1.2.1. *En dimension $d = 2$, il y a un facteur logarithmique additionnel pour l'estimation en temps petit, qui devient $|t|^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}(1 - \log |t|)^{1 - \frac{2}{q}}$.*

Théorème VII (Inégalité de Strichartz sur \mathbb{Y}). *Soient (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) deux paires admissibles au sens que $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ appartiennent à l'ensemble*

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} \geq \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{d-1} \right) \right\}. \quad (1.14)$$

Supposons que σ et $\tilde{\sigma}$ remplient les conditions de régularité

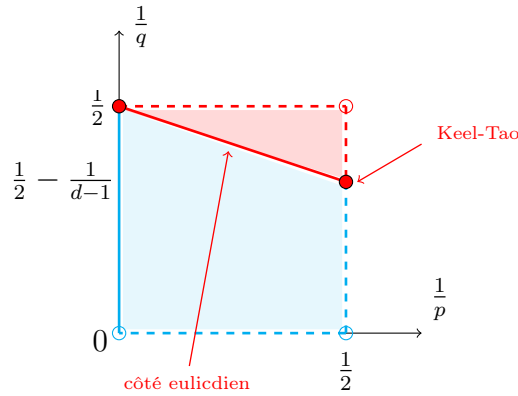
$$\sigma \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma} \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right).$$

Alors toute solution u du problème de Cauchy (1.12) satisfait l'estimation suivante :

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{Y}} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{Y}))} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{Y})} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{Y})} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}(\mathbb{Y}))}. \quad (1.15)$$

De plus, l'ensemble admissible peut être élargi au carré

$$\left[0, \frac{1}{2} \right) \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{d-1} \right) \right\}.$$


 FIGURE 1.9 – Admissibilité pour \mathbb{Y} en dimension $d \geq 4$.

en utilisant le plongement de Sobolev. Autrement dit, l'inégalité (1.15) reste valable pour toutes les solutions de (1.12) à condition que $\sigma \geq \sigma(p, q)$ et $\tilde{\sigma} \geq \sigma(\tilde{p}, \tilde{q})$, où

$$\sigma(p, q) = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) + \max \left\{ 0, \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} \right\}.$$

Remarque 1.2.2. Une version de *Théorème VII* reste encore valable en petites dimensions $d = 2$ et $d = 3$, voir *Sect. 4.4.1*. En comparaison avec le triangle admissible (1.7) sur les espaces symétriques, (1.14) perd son bord à droite. La raison en est que la méthode TT^* utilisée pour prouver l'inégalité de Strichartz ne fonctionne plus dans le cas critique où $p = 2$ et $q < 2 \frac{d-1}{d-3}$. La méthode de décomposition dyadique de Keel et Tao [KeTa98] prend en charge ces points critiques, mais elle requiert une propriété de dispersion plus forte en temps petit qui est similaire au *Théorème II*. Une telle estimation découlerait de

$$\|\widehat{\omega}_t^\sigma\|_{L^q(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}} \quad \forall 0 < |t| < 1$$

qui n'est pas connu pour l'instant sur \mathbb{Y} . Cependant, ces points critiques ne sont pas concernés pour étudier l'existence de la solution du problème de Cauchy semi-linéaire correspondant. Par conséquent nous obtenons les résultats suivants qui sont analogues aux espaces symétriques.

Théorème VIII. Supposons que \mathbb{Y} vérifie les trois conditions (a), (b) et (c). Alors il existe $2 \leq p, q < +\infty$ tels que le problème de Cauchy semi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \mathbf{D}_x^2 u(t, x) = F_\gamma(u(t, x)), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x), \end{cases}$$

avec une non linéarité de type puissance (1.10), est globalement bien posé dans $L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{Y}))$ pour des données initiales petites dans $H^\sigma(\mathbb{Y}) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{Y})$, à condition que σ satisfasse (1.11).

1.2.3 Caractérisation du bas du spectre L^2 de $-\Delta_{\mathbb{Y}}$

Nous venons de définir le noyau des ondes (1.13) sur les espaces localement symétriques à l'aide du noyau défini sur les espaces symétriques. Afin d'étudier un tel noyau, nous devons souvent analyser la série de Poincaré. Notre dernier résultat dans cette thèse est de caractériser le bas du spectre L^2 de $-\Delta_{\mathbb{Y}}$ en utilisant certaines séries de Poincaré modifiées. Ce résultat est un analogue en rang supérieur de la caractérisation obtenue par Elstrodt, Patterson, Sullivan et Corlette en rang un. Rappelons qu'on peut exprimer $\lambda_0(\mathbb{Y})$, le bas du spectre L^2 de $-\Delta_{\mathbb{Y}}$, en termes de l'exposant critique $\delta(\Gamma)$ et de la demi somme des racines positives ρ lorsque \mathbb{Y} est de rang un.

Théorème 1.2.3 ([Els73a; Els73b; Els74; Pat76; Sul87; Cor90]). *Dans le cas de rang un, nous avons*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) = \begin{cases} \rho^2 & \text{si } 0 \leq \delta(\Gamma) \leq \rho, \\ \rho^2 - (\delta(\Gamma) - \rho)^2 & \text{si } \rho \leq \delta(\Gamma) \leq 2\rho. \end{cases} \quad (1.16)$$

En utilisant la notation $\rho_{\min} = \min_{H \in \overline{\mathfrak{a}^+}, \|H\|=1} \langle \rho, H \rangle \in (0, |\rho|]$, Leuzinger et Weber ont établi les estimations suivantes en rang supérieur.

Théorème 1.2.4 ([Leu04; Web08]). *Dans le cas général, nous avons*

- *Borne supérieure :*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) \leq \begin{cases} |\rho|^2 & \text{si } 0 \leq \delta(\Gamma) \leq |\rho|, \\ |\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - |\rho|)^2 & \text{si } |\rho| \leq \delta(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases}$$

- *Borne inférieure :*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) \geq \begin{cases} |\rho|^2 & \text{si } 0 \leq \delta(\Gamma) \leq \rho_{\min}, \\ \max\{0, |\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - \rho_{\min})^2\} & \text{si } \rho_{\min} \leq \delta(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases} \quad (1.17)$$

Selon l'approche utilisée dans [Ank90; Ank91; Ank92], nous remplaçons la distance riemannienne $d(\cdot, \cdot)$ par la distance polyédrique

$$d'(x, y) = \left\langle \frac{\rho}{|\rho|}, (y^{-1}x)^+ \right\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{X},$$

où $(y^{-1}x)^+$ est la $\overline{\mathfrak{a}^+}$ -composante de $y^{-1}x$ dans la décomposition de Cartan. Désignons par

$$P'_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd'(x, \gamma y)} \quad \forall s > 0, \forall x, y \in \mathbb{X},$$

la série de Poincaré associée à la distance $d'(\cdot, \cdot)$, et par $\delta'(\Gamma) = \inf\{s > 0 \mid P'_s(x, y) < +\infty\}$ son exposant critique. En appliquant les arguments de [Cor90] à la série de Poincaré modifiée $P'_s(x, y)$, nous démontrons le résultat suivant, qui améliore légèrement la borne inférieure (1.17), au sens où nous nous débarrassons de ρ_{\min} .

Théorème IX. *La borne inférieure pour le bas $\lambda_0(\mathbb{Y})$ du L^2 spectre de $-\Delta_{\mathbb{Y}}$ satisfait*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) \geq \begin{cases} |\rho|^2 & \text{si } 0 \leq \delta'(\Gamma) \leq |\rho|, \\ |\rho|^2 - (\delta'(\Gamma) - |\rho|)^2 & \text{si } |\rho| \leq \delta'(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases}$$

Ensuite, nous considérons une famille des distances combinant $d(\cdot, \cdot)$ et $d'(\cdot, \cdot)$:

$$d_s(x, y) = \min\{s, |\rho|\}d'(x, y) + \max\{s - |\rho|, 0\}d(x, y) \quad \forall s > 0, \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Désignons par $P''_s(x, y)$ la série de Poincaré associée à la distance $d_s(\cdot, \cdot)$ et par $\delta''(\Gamma)$ son exposant critique. Nous établissons enfin la caractérisation de $\lambda_0(\mathbb{Y})$ en termes de $\delta''(\Gamma)$ et $|\rho|$ sur les espaces localement symétriques de rang général.

Théorème X. *La caractérisation suivante est valable pour le bas $\lambda_0(\mathbb{Y})$ du L^2 spectre de $-\Delta_{\mathbb{Y}}$:*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) = \begin{cases} |\rho|^2 & \text{si } 0 \leq \delta''(\Gamma) \leq |\rho|, \\ |\rho|^2 - (\delta''(\Gamma) - |\rho|)^2 & \text{si } |\rho| \leq \delta''(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases}$$

Comme $|\rho| = \rho$ en rang un, on aura dans ce cas $d_s(\cdot, \cdot) = sd'(\cdot, \cdot) = sd(\cdot, \cdot)$ pour tout $s > 0$, alors $\delta''(\Gamma) = \delta(\Gamma)$. On retourne donc la caractérisation du rang un.

Remarque 1.2.5. *Si Γ est un réseau, autrement dit, si $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ est de volume fini, alors $\lambda_0(\mathbb{Y}) = 0$ et $\delta''(\Gamma) = \delta'(\Gamma) = \delta(\Gamma) = 2|\rho|$. Comme l'a souligné Corlette [Cor90] en rang un et Leuzinger [Leu03] en rang supérieur, si G a la propriété (T) de Kazhdan, alors les conditions suivantes sont en fait équivalentes :*

- (a) Γ est un réseau, (b) $\lambda_0(\mathbb{Y}) = 0$, (c) $\delta(\Gamma) = 2|\rho|$, (d) $\delta''(\Gamma) = 2|\rho|$.

Chapitre 2

Wave equation on certain noncompact Riemannian symmetric spaces

Ce chapitre reprend l'article [Zhw20] soumis à la revue.

Résumé : *Dans ce chapitre, nous démontrons les estimations ponctuelles du noyau et les propriétés dispersives optimales pour l'équation des ondes linéaire sur des espaces symétriques non compacts G/K de rang général avec G complexe. En conséquence, nous établissons les inégalités de Strichartz pour une grande famille de paires admissibles, et en déduisons que, comme sur les espaces hyperboliques, l'équation semi-linéaire correspondante est globalement bien posée pour les données initiales de régularité faible.*

This chapter resumes the article [Zhw20] submitted to the journal.

Abstract : *In this chapter, we prove sharp pointwise kernel estimates and dispersive properties for the linear wave equation on noncompact symmetric spaces G/K of any rank with G complex. As consequences, we establish Strichartz inequalities for a large family of admissible pairs and prove global well-posedness results for the corresponding semilinear equation with low regularity data as on hyperbolic spaces.*

Summary

2.1	Introduction	24
2.2	Preliminaries	25
2.3	Pointwise estimates of the wave kernel	27
2.4	Dispersive estimates	36
2.4.1	Small time dispersive estimate	37
2.4.2	Large time dispersive estimate	38
2.5	Strichartz inequality and applications	39
2.5.1	Strichartz inequality	39
2.5.2	Global well-posedness for the semilinear wave equation	40
2.6	Further results on locally symmetric spaces	41

2.1 Introduction

This paper is devoted to study the dispersive properties of the linear wave equation on noncompact symmetric space G/K of any rank with G complex, and their applications to nonlinear Cauchy problems. This theory is well established for the wave equation on \mathbb{R}^d with $d \geq 3$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{R}^d} u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x), \end{cases}$$

where the solutions u satisfy the Strichartz inequality :

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{R}^d))} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}(\mathbb{R}^d))},$$

on any (possibly unbounded) interval $I \subseteq \mathbb{R}$ under the assumptions that

$$\sigma = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad \tilde{\sigma} = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right),$$

and the couples $(p, q), (\tilde{p}, \tilde{q}) \in (2, +\infty] \times [2, 2\frac{d-1}{d-3}]$ fulfill the admissibility conditions :

$$\frac{1}{p} = \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right).$$

Notice that this inequality also holds at the endpoint $(2, 2\frac{d-1}{d-3})$ when $d \geq 4$, but fails without additional assumptions when $d = 3$ (see [GiVe95] and [KeTa98] for more details). These estimates serve as a tool in order to find minimal regularity conditions on the initial data ensuring well-posedness for corresponding semilinear wave equations, which is addressed in [Kap94], and almost fully answered in [LiSo95; GLS97; KeTa98; DGK01].

Given the rich Euclidean theory, several attempts have been made in order to establish Strichartz inequality for dispersive equations in other settings. We are interested in Riemannian symmetric spaces of noncompact type where relevant questions are now well answered in the rank one case, see for instance [Fon97; Tat01; MeTa11; MeTa12; APV12; AnPi14] on hyperbolic spaces, and [APV15] on Damek-Ricci spaces. A first study of the wave equation on general symmetric spaces of higher rank was carried out in [Has11], where some non optimal estimates were obtained under the strong smoothness assumption.

In this paper, we prove sharp estimates for the non-shifted wave equation on noncompact symmetric spaces G/K of any rank with G complex. In this case, the Harish-Chandra \mathbf{c} -function and the spherical function have elementary expressions, which allow us to analyze accurately the wave kernel. For lack of such expressions in general, our present approach is limited to the class of symmetric spaces G/K with G complex, and maybe to a few other cases.

Consider the operator $W_t^\sigma = \tilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$ defined on the symmetric space $\mathbb{X} = G/K$, for suitable exponents $\sigma \in \mathbb{C}$, where ρ denotes the half sum of positive roots, and $\tilde{\mathbf{D}} = \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}} - |\rho|^2 + \tilde{\rho}^2}$ is the differential operator with a fixed constant $\tilde{\rho} \geq |\rho|$. To avoid possible singularities, we may consider the analytic family of operators

$$\tilde{W}_t^\sigma = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} \tilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}},$$

in the vertical strip $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$, see (2.11). We denote by $\tilde{\omega}_t^\sigma$ its K -bi-invariant convolution kernel. Our first and main result is the following pointwise kernel estimate, which summarizes Theorem 2.3.1 and Theorem 2.3.3 proved in Sect. 2.3.

Theorem 2.1.1 (Pointwise kernel estimates). *For all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that the following estimates hold for all $x \in \mathbb{X}$:*

$$|\tilde{\omega}_t^\sigma(x)| \lesssim (1 + |x^+|)^N e^{-\langle \rho, x^+ \rangle} \begin{cases} |t|^{-\frac{d-1}{2}} & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{d}{2}} & \text{if } |t| \geq 1, \end{cases}$$

where $x^+ \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ denotes the radial component of \mathbb{X} in the Cartan decomposition.

Remark 2.1.2. *These kernel estimates are sharp in time and similar results hold obviously in the easier case where $\operatorname{Re} \sigma > \frac{d+1}{2}$. The value of N will be specified in [Theorem 2.3.1](#) and [Theorem 2.3.3](#). However, the polynomial $(1 + |x^+|)^N$ is not crucial for further computations since there is an exponential decay following.*

By interpolation arguments, we deduce our second result.

Theorem 2.1.3 (Dispersion property). *Let $2 < q, \tilde{q} < +\infty$ and $\sigma \geq (d+1) \max(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})$. Then there exists a constant $C > 0$ such that the following dispersive estimates hold :*

$$\|W_t^\sigma\|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \leq C \begin{cases} |t|^{-(d-1) \max(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})} & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{d}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Remark 2.1.4. *At the endpoint $q = \tilde{q} = 2$, $t \mapsto e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$ is a one-parameter group of unitary operators on $L^2(\mathbb{X})$.*

Remark 2.1.5. *These estimates, which are proved on real hyperbolic spaces in [\[AnPi14\]](#), extend straightforwardly to all the noncompact symmetric spaces of rank 1, and more generally to all Damek-Ricci spaces. In these cases, the large time decay is $|t|^{-\frac{3}{2}}$, where « 3 » corresponds to the so-called dimension at infinity of \mathbb{X} . In higher rank, the dimension at infinity coincides with the manifold dimension d of G/K if and only if G is complex.*

Remark 2.1.6. *In [\[CGM02\]](#), M. Cowling, S. Giulini and S. Meda have described the L^p - L^q boundedness of a semi-group of operators related to the shifted Laplacian in constant time $t = 1$ on general noncompact symmetric spaces. However, sharp dispersive properties with a general $t \in \mathbb{R}^*$ are crucial for proving Strichartz type inequalities and for studying related PDE problems. Along the lines in [\[CGM02\]](#), we may derive a sharp dispersive inequality in small time $|t| \leq 1$. But as mentioned by these authors, their method does not yield good estimates in large time.*

This paper is organized as follows. After recalling some basic notations and reviewing harmonic analysis on noncompact symmetric spaces in [Sect. 2.2](#), we derive pointwise kernel estimates in [Sect. 2.3](#). We prove the dispersive estimates by interpolation arguments in [Sect. 2.4](#). As a consequence, we deduce in [Sect. 2.5](#), Strichartz inequalities for a large family of admissible pairs and obtain well-posedness results for the associated semilinear wave equation. In [Sect. 2.6](#), we discuss similar results on a class of locally symmetric spaces.

2.2 Preliminaries

We review in this section some elementary notations and facts about noncompact symmetric spaces. We refer to [\[Hel78 ; Hel00 ; GaVa88\]](#) for more details.

Let G be a complex semisimple Lie group, connected, noncompact, with finite center, and K be a maximal compact subgroup of G . The homogeneous space $\mathbb{X} = G/K$ is a Riemannian symmetric space of noncompact type and dimension $d \geq 3$. Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ be the Cartan decomposition of the Lie algebra of G . The Killing form of \mathfrak{g} induces a K -invariant inner product on \mathfrak{p} , hence a G -invariant Riemannian metric on \mathbb{X} , whose tangent space at the origin is identified with \mathfrak{p} .

Fix a maximal abelian subspace \mathfrak{a} in \mathfrak{p} . The rank of \mathbb{X} is the dimension ℓ of \mathfrak{a} . Let $\Sigma \subset \mathfrak{a}$ be the root system of $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ which is reduced, and denote by W the Weyl group associated to Σ . Choose a set Σ^+ of positive roots, let $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ be the corresponding positive Weyl chamber and $\overline{\mathfrak{a}^+}$ be its closure. Notice that $d = \ell + 2|\Sigma^+|$ in our case. As usual, $\rho \in \mathfrak{a}^+$ denotes the half sum of positive roots, counted with their multiplicities, which is given in our case by $\rho = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$. It is well known that the spectrum of the negative Laplace-Beltrami operator $-\Delta_{\mathbb{X}}$ on $L^2(\mathbb{X})$ is the half-line $[|\rho|^2, +\infty)$.

Denote by \mathfrak{n} the nilpotent Lie subalgebra of \mathfrak{g} associated with Σ^+ , and by N the corresponding Lie subgroup of G . Then we have the following two decompositions of G :

$$\begin{cases} G = N(\exp \mathfrak{a})K & \text{(Iwasawa),} \\ G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}^+})K & \text{(Cartan).} \end{cases}$$

In the Cartan decomposition, the Haar measure on G writes

$$\int_G dx f(x) = \text{const.} \int_K dk_1 \int_{\mathfrak{a}^+} dH \delta(H) \int_K dk_2 f(k_1(\exp H)k_2), \quad (2.1)$$

where

$$\delta(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\sinh \langle \alpha, H \rangle)^2 \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{\langle \alpha, H \rangle}{1 + \langle \alpha, H \rangle} \right\}^2 e^{\langle 2\rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

Denote by $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ the Schwartz space of K -bi-invariant functions on G . The spherical Fourier transform \mathcal{H} is defined by

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_G dx f(x) \varphi_{-\lambda}(x) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}, \forall f \in \mathcal{S}(K \backslash G / K).$$

Here $\varphi_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(K \backslash G / K)$ denotes the spherical function of index $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$, which is a radial eigenfunction of the Laplace-Beltrami operator $\Delta_{\mathbb{X}}$ satisfying

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{X}} \varphi_\lambda(x) = (|\lambda|^2 + |\rho|^2) \varphi_\lambda(x), \\ \varphi_\lambda(\mathbf{0}) = 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

In the noncompact case, the spherical functions are given by

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K dk e^{i\lambda + \rho, A(kx)} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}, \quad (2.3)$$

where $A(kx)$ is the unique \mathfrak{a} -component in the Iwasawa decomposition of kx . It satisfies the basic estimate

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq \varphi_0(x) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}, \forall x \in \mathbb{X}, \quad (2.4)$$

where

$$\varphi_0(\exp H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{\langle \alpha, H \rangle}{\sinh \langle \alpha, H \rangle} \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (1 + \langle \alpha, H \rangle) \right\} e^{-\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}. \quad (2.5)$$

If G is complex, we have also

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi_0(x) \int_K dk e^{i\langle (\text{ad } k) \cdot \lambda, x \rangle}. \quad (2.6)$$

Denote by $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$ the subspace of W -invariant functions in the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$. Then \mathcal{H} is an isomorphism between $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ and $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$. The inverse spherical Fourier transform is defined by

$$f(x) = \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(x) \mathcal{H}f(\lambda) \quad \forall x \in G, \forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W, \quad (2.7)$$

where $\mathbf{c}(\lambda)$ is the Harish-Chandra \mathbf{c} -function. If G is complex, the Plancherel density reads

$$|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} = \pi(\lambda)^2 = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \alpha, \lambda \rangle^2, \quad (2.8)$$

and in particular, the inverse spherical Fourier transform (2.7) becomes

$$f(x) = \text{const.} \varphi_0(x) \int_{\mathfrak{p}} d\lambda \mathcal{H}f(\lambda) e^{-i\langle (\text{ad } k) \cdot \lambda, x \rangle}.$$

Recall at last the asymptotic expansion of the Bessel function of the first kind :

$$J_m(r) \sim r^{-1/2} e^{ir} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(m) r^{-j} + r^{-1/2} e^{-ir} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(m) r^{-j} \quad \text{as } r \rightarrow +\infty, \quad (2.9)$$

where $a_j(m)$ and $b_j(m)$ are suitable coefficients.

2.3 Pointwise estimates of the wave kernel

In this section, we derive pointwise estimates for the K -bi-invariant convolution kernel ω_t^σ of the operator $W_t^\sigma = \tilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$ on the symmetric space \mathbb{X} :

$$W_t^\sigma f(x) = f * \omega_t^\sigma(x) = \int_G dy \omega_t^\sigma(y^{-1}x)f(y),$$

for suitable exponents $\sigma \in \mathbb{C}$. Via the spherical Fourier transform and (2.2), the negative Laplace-Beltrami operator $-\Delta_{\mathbb{X}}$ corresponds to $|\lambda|^2 + |\rho|^2$, hence the operator $\tilde{\mathbf{D}}$ to $\sqrt{|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2}$. The inverse spherical Fourier transform implies that

$$\omega_t^\sigma(x) = \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} \varphi_\lambda(x). \quad (2.10)$$

As already observed for hyperbolic spaces (see for instance [APV12]), the classical Euclidean rescaling method fails since this kernel has different behaviors depending whether t is small or large. We will prove sharp time pointwise estimates for this kernel along the lines of [AnPi14].

Consider smooth even cut-off functions χ_0 and χ_∞ on \mathbb{R} such that

$$\chi_0(r) + \chi_\infty(r) = 1 \quad \text{and} \quad \begin{cases} \chi_0(r) = 1 & \text{if } |r| \leq 1, \\ \chi_\infty(r) = 1 & \text{if } |r| \geq 2. \end{cases}$$

Let us split up

$$\begin{aligned} \omega_t^\sigma(x) &= \omega_t^{\sigma,0}(x) + \omega_t^{\sigma,\infty}(x) \\ &= \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_0^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} \varphi_\lambda(x) \\ &\quad + \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_\infty^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} \varphi_\lambda(x) \end{aligned}$$

where $\chi_0^\rho(\lambda) = \chi_0(|\lambda|/|\rho|)$ and $\chi_\infty^\rho(\lambda) = \chi_\infty(|\lambda|/|\rho|)$ are radial cut-off functions defined on \mathfrak{a} . We shall see later that the kernel $\omega_t^{\sigma,\infty}(x)$ has a logarithmic singularity on the sphere $|x| = t$ when $\sigma = \frac{d+1}{2}$. To get around this problem, we consider the analytic family of operators

$$\tilde{W}_t^{\sigma,\infty} = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} \chi_\infty^\rho(\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}} - |\rho|^2}) \tilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}, \quad (2.11)$$

in the vertical strip $0 \leq \text{Re } \sigma \leq \frac{d+1}{2}$ and the corresponding kernels

$$\tilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}(x) = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_\infty^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} \varphi_\lambda(x).$$

Notice that the Gamma function will allow us to deal with the boundary point $\sigma = \frac{d+1}{2}$, while the exponential function ensures boundedness at infinity in the vertical strip.

Theorem 2.3.1. *Let $\sigma \in \mathbb{C}$. The following pointwise estimates hold for the kernel $\omega_t^{\sigma,0}$:*

(i) *For all $t \in \mathbb{R}^*$, we have*

$$|\omega_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim \varphi_0(x).$$

(ii) *Assume that $|t| \geq 1$ and $\frac{|x|}{|t|} \leq \frac{1}{2}$. Then*

$$|\omega_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}} (1 + |x|)^{\frac{d-\ell}{2}} \varphi_0(x).$$

Proof. By symmetry we may assume that $t > 0$. Recall that

$$\omega_t^{\sigma,0}(x) = \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_0^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} \varphi_\lambda(x). \quad (2.12)$$

(i) follows from the representation (2.8) and the estimate (2.4) that

$$|\omega_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim \int_{|\lambda| < 2|\rho|} d\lambda |\lambda|^{d-\ell} |\varphi_\lambda(x)| \lesssim \varphi_0(x).$$

We prove (ii) by substituting in (2.12) the integral representation (2.3) of φ_λ and the expression (2.8) of $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$. Specifically,

$$\omega_t^{\sigma,0}(x) = \text{const.} \int_K dk e^{\langle \rho, A(kx) \rangle} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda a(\lambda) e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2} + i\langle \lambda, A(kx) \rangle},$$

where $a(\lambda) = \chi_0^\rho(\lambda) \pi(\lambda)^2 (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}}$. Since

$$\int_K dk e^{\langle \rho, A(kx) \rangle} = \varphi_0(x),$$

it remains to estimate the oscillatory integral

$$I_0(t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda a(\lambda) e^{it\psi(\lambda)}$$

with amplitude $a(\lambda)$ and phase

$$\psi(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2} + \left\langle \frac{A}{t}, \lambda \right\rangle,$$

where $A = A(kx)$ is a vector in \mathfrak{a} such that $|A(kx)| \leq |x|$. This is achieved by carrying out in our case, the stationary phase analysis described in [Ste93, p. VIII.2.3]. The critical point λ_0 of the phase ψ is given by

$$(|\lambda_0|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{1}{2}} \lambda_0 = -\frac{A}{t}.$$

Hence

$$|\lambda_0| = |\rho| \frac{|A|}{t} \left(1 - \frac{|A|^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq |\rho| \frac{|x|}{t} \left(1 - \frac{|x|^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.13)$$

Denote by $B(\lambda_0, \eta)$ the ball in \mathfrak{a} centered at λ_0 :

$$B(\lambda_0, \eta) = \{\lambda \in \mathfrak{a} \mid |\lambda - \lambda_0| \leq \eta\},$$

where the radius η will be chosen later. Notice that if $\frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{2}$, then $|\lambda_0| < \frac{|\rho|}{\sqrt{3}}$ and $|\lambda| < |\rho| + \eta$ for all $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$. Let P_λ be the projection onto the vector spanned by $\frac{\lambda}{|\lambda|}$. Then $|\lambda|^2 P_\lambda = \lambda \otimes \lambda$ and the Hessian matrix of ψ is given by

$$\begin{aligned} \text{Hess } \psi(\lambda) &= (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{1}{2}} I_\ell - (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{3}{2}} \lambda \otimes \lambda \\ &= (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{3}{2}} \{ |\rho|^2 P_\lambda + (|\lambda|^2 + |\rho|^2)(I_\ell - P_\lambda) \} \\ &= (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{3}{2}} \left(\begin{array}{c|c} |\rho|^2 & 0 \\ \hline 0 & (|\lambda|^2 + |\rho|^2) I_{\ell-1} \end{array} \right), \end{aligned}$$

which is a positive definite symmetric matrix. Hence λ_0 is a nondegenerate critical point. Since $\nabla_{\mathfrak{a}} \psi(\lambda_0) = 0$, we have

$$\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)^T \underbrace{\left\{ \int_0^1 ds (1-s) \text{Hess } \psi(\lambda_0 + s(\lambda - \lambda_0)) \right\}}_{=M(\lambda)} (\lambda - \lambda_0),$$

where $M(\lambda)$ belongs, for every $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$, to a compact subset of the set of positive definite symmetric matrices. We introduce a new variable $\mu = M(\lambda)^{\frac{1}{2}}(\lambda - \lambda_0)$, then $|\mu|^2 = \psi(\lambda) - \psi(\lambda_0)$ and $\mu = 0$ if and only if $\lambda = \lambda_0$. Notice that for every $k \in \mathbb{N}$, there exists $C_k > 0$ such that

$$|\nabla_{\mathbf{a}}^k M(\lambda)^{\frac{1}{2}}| \leq C_k \quad \forall \lambda \in B(\lambda_0, \eta). \quad (2.14)$$

Denote by $J(\lambda)$ the Jacobian matrix such that $d\mu = \det [J(\lambda)] d\lambda$, then we can choose $\eta > 0$ small enough such that

$$\det [J(\lambda)] > \frac{1}{2} \det [M(\lambda)^{\frac{1}{2}}] \quad \forall \lambda \in B(\lambda_0, \eta). \quad (2.15)$$

Now let us divide the study of $I_0(t, x)$ into two parts, corresponding to the decomposition

$$I_0(t, x) = \underbrace{\int_{\mathbf{a}} d\lambda \chi_{\eta}^{-}(\lambda) a(\lambda) e^{it\psi(\lambda)}}_{=I_0^{-}(t, x)} + \underbrace{\int_{\mathbf{a}} d\lambda \chi_{\eta}^{+}(\lambda) a(\lambda) e^{it\psi(\lambda)}}_{=I_0^{+}(t, x)},$$

associated with the smooth cut-off functions

$$\chi_{\eta}^{-}(\lambda) = \chi_0\left(\frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\eta}\right) \quad \text{and} \quad \chi_{\eta}^{+}(\lambda) = \chi_{\infty}\left(\frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\eta}\right).$$

Estimate of $I_0^{-}(t, x)$. Notice that $\text{supp } \chi_{\eta}^{-} \subset B(\lambda_0, \eta)$. There exist $0 < \tilde{\eta}_1 \leq \tilde{\eta}_2$ such that $\mu \in B(0, \tilde{\eta}_1)$ implies $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$, and $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$ implies $\mu \in B(0, \tilde{\eta}_2)$. By substituting $\psi(\lambda) = |\mu|^2 + \psi(\lambda_0)$, we get

$$I_0^{-}(t, x) = e^{it\psi(\tilde{\lambda})} \int_{\mathbf{a}} d\mu \tilde{a}(\lambda(\mu)) e^{it|\mu|^2}$$

where the amplitude

$$\tilde{a}(\lambda(\mu)) = \chi_{\eta}^{-}(\lambda(\mu)) \chi_0^{\rho}(\lambda(\mu)) \pi(\lambda(\mu))^2 (|\lambda(\mu)|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \det [J(\lambda(\mu))]^{-1} \quad (2.16)$$

is smooth and compactly supported in $B(0, \tilde{\eta}_2)$. We deduce, from (2.14) and (2.15) that $\tilde{a}(\lambda(\mu))$ is bounded, together with all its derivatives. Let $\tilde{\chi} \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbf{a})$ be a bump function such that $\tilde{\chi} = 1$ on $B(0, \tilde{\eta}_2)$. Let $M \geq \frac{d}{2}$ be an integer. Then

$$I_0^{-}(t, x) = e^{it\psi(\lambda_0)} \int_{\mathbf{a}} d\mu e^{it|\mu|^2} e^{-|\mu|^2} [e^{|\mu|^2} \tilde{a}(\lambda(\mu))] \tilde{\chi}(\mu),$$

where the coefficients of the Taylor expansion of $e^{|\mu|^2} \tilde{a}(\lambda(\mu))$ at the origin :

$$e^{|\mu|^2} \tilde{a}(\lambda(\mu)) = \sum_{|k| \leq 2M} c_k \mu^k + R_{2M}(\mu),$$

satisfy

$$|c_k| \lesssim \left(\frac{|x|}{t}\right)^{d-\ell}, \quad (2.17)$$

and the remainder

$$|\nabla_{\mathbf{a}}^k R_{2M}(\mu)| \lesssim |\mu|^{2M+1-k} \quad \forall 0 \leq k \leq 2M+1, \quad (2.18)$$

according to (2.13) and (2.16). By substituting this expansion in the above integral, $I_0^{-}(t, x)$ is equal to the sum of following three terms :

$$I_1 = \sum_{|k| \leq 2M} c_k \int_{\mathbf{a}} d\mu e^{it|\mu|^2} e^{-|\mu|^2} \mu^k, \\ I_2 = \int_{\mathbf{a}} d\mu e^{it|\mu|^2} R_{2M}(\mu) e^{-|\mu|^2} \tilde{\chi}(\mu),$$

and

$$I_3 = \int_{\mathfrak{a}} d\mu e^{it|\mu|^2} \left(\sum_{|k| \leq 2M} c_k \mu^k \right) e^{-|\mu|^2} (\tilde{\chi}(\mu) - 1).$$

In order to estimate I_1 , we write the integral as a product

$$I_1 = \sum_{|k| \leq 2M} c_k \prod_{j=1}^{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_j e^{it\mu_j^2} e^{-\mu_j^2} \mu_j^{k_j},$$

where

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_j e^{-(1-it)\mu_j^2} \mu_j^{k_j} = 0$$

if k_j is odd, while

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_j e^{-(1-it)\mu_j^2} \mu_j^{k_j} = 2(1-it)^{-\frac{k_j+1}{2}} \int_0^{+\infty} dz_j e^{-z_j^2} z_j^{k_j}$$

by a change of contour if k_j is even. From (2.17), we obtain

$$|I_1| \lesssim \left(\frac{|x|}{t} \right)^{d-\ell} t^{-\frac{\ell}{2}} = t^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right)^{d-\ell} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} |x|^{-\frac{d-\ell}{2}},$$

since $\frac{|x|}{t} < \frac{1}{2}$. Next, we perform M integrations by parts based on

$$e^{it|\mu|^2} = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\mu_j}{|\mu|^2} \frac{\partial}{\partial \mu_j} e^{it|\mu|^2} \quad (2.19)$$

and obtain

$$I_2 = O(t^{-M}),$$

according to (2.18). Finally, as $\mu \mapsto \left(\sum_{|k| \leq 2M} c_k \mu^k \right) e^{-|\mu|^2} (\tilde{\chi}(\mu) - 1)$ is exponentially decreasing and vanishes near the origin, we perform $N \geq \frac{d}{2}$ integrations by parts based on (2.19) again and obtain

$$I_3 = O(t^{-N}).$$

By summing up the estimates of I_1 , I_2 and I_3 , we deduce that

$$|I_0^-(t, x)| \lesssim t^{-\frac{d}{2}} (1 + |x|)^{\frac{d-\ell}{2}}. \quad (2.20)$$

Estimate of $I_0^+(t, x)$. Since the phase ψ has a unique critical point λ_0 , then for all $\lambda \in \text{supp } \chi_{\eta}^+$, $\nabla_{\mathfrak{a}} \psi(\lambda) \neq 0$. In order to get a large time decay, we estimate the oscillatory integral $I_0^+(t, x)$ by using several integrations by parts based on

$$e^{it\psi(\lambda)} = \frac{1}{it} (\tilde{\psi}(\lambda))^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} e^{it\psi(\lambda)}, \quad (2.21)$$

where

$$\tilde{\psi}(\lambda) = |\lambda|^2 (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{1}{2}} + \left\langle \frac{\mathfrak{A}}{t}, \lambda \right\rangle$$

is a nonzero symbol of order zero for all $\lambda \in \text{supp } \chi_\eta^+$. After performing N such integrations by parts, $I_0^+(t, x)$ becomes

$$I_0^+(t, x) = \text{const.} (it)^{-N} \underbrace{\int_{\mathfrak{a}} d\lambda e^{it\psi(\lambda)} \left\{ - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \circ \frac{\lambda_j}{\widetilde{\psi}(\lambda)} \right\}^N \left\{ \chi_\eta^+(\lambda) a(\lambda) \right\}}_{< +\infty},$$

for every $N \in \mathbb{N}$. The last integral is finite since the amplitude a is supported in $B(0, 2|\rho|)$ thanks to the cut-off χ_0^ρ . Hence

$$|I_0^+(t, x)| \lesssim t^{-N}, \quad (2.22)$$

for every integer $N \geq 0$. According to (2.20) and (2.22), we conclude that

$$|\omega_t^{\sigma, 0}(x)| \lesssim |I_0(t, x)| \int_K dk e^{-\langle \rho, A(xk) \rangle} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} |x|^{\frac{d-\ell}{2}} \varphi_0(x).$$

□

Remark 2.3.2. In the proof of [Theorem 2.3.1](#), we have replaced the spherical function $\varphi_\lambda(x)$ by its general integral expression (2.3). Moreover, this proof also works without using the explicit expression (2.8) of the density $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$. Thus we can derive similar estimates for any symmetric space G/K by the same approach.

Theorem 2.3.3. Let $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\text{Re } \sigma = \frac{d+1}{2}$. The following pointwise estimates hold for the kernel $\widetilde{\omega}_\infty^\sigma(t, x)$, for all $t \in \mathbb{R}^*$ and $x \in \mathbb{X}$:

$$|\widetilde{\omega}_t^{\sigma, \infty}(x)| \lesssim \begin{cases} |t|^{-\frac{d-1}{2}} \varphi_0(x) & \text{if } |t| < 1, \\ |t|^{-N} (1 + |x|)^N \varphi_0(x) & \text{if } |t| \geq 1, \end{cases}$$

for every $N \in \mathbb{N}$.

Remark 2.3.4. Similar estimates hold in the easier case $\text{Re } \sigma > \frac{d+1}{2}$. By symmetry we assume again that $t > 0$. We divide the proof into two parts, depending whether $\frac{|x|}{t} \geq \frac{1}{2}$ or not.

Proof for $\frac{|x|}{t} \geq \frac{1}{2}$. Substituting the integral representation (2.6) of φ_λ allows us to write the kernel as

$$\widetilde{\omega}_t^{\sigma, \infty}(x) = \text{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma((d+1)/2 - \sigma)} \varphi_0(x) \underbrace{\int_{\mathfrak{p}} d\lambda \chi_\infty^\rho(\lambda) (|\lambda|^2 + \widetilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} e^{-i\langle x, \lambda \rangle}}_{=I_\infty(t, x)}.$$

We split up $I_\infty(t, x)$ into two parts

$$I_\infty(t, x) = \underbrace{\int_{\mathfrak{p}} d\lambda \chi_0^\rho(t\lambda) \chi_\infty^\rho(\lambda) (|\lambda|^2 + \widetilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} e^{-i\langle x, \lambda \rangle}}_{I_\infty^-(t, x)} + \underbrace{\int_{\mathfrak{p}} d\lambda \chi_\infty^\rho(t\lambda) \chi_\infty^\rho(\lambda) (|\lambda|^2 + \widetilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} e^{-i\langle x, \lambda \rangle}}_{I_\infty^+(t, x)},$$

by using the smooth radial cut-off functions $\chi_0^\rho(t\lambda)$ and $\chi_\infty^\rho(t\lambda)$. The first integral $I_\infty^-(t, x)$ vanishes if $t \geq 2$ and is easily estimated as follows, if $0 < t < 2$:

$$|I_\infty^-(t, x)| \lesssim \int_{\mathfrak{p}} d\lambda \chi_0^\rho(t\lambda) \chi_\infty^\rho(\lambda) |\lambda|^{-\text{Re } \sigma} \leq t^{-\frac{d-1}{2}} \int_{\mathfrak{p}} d\lambda \chi_0^\rho(\lambda) |\lambda|^{-\frac{d+1}{2}} \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}}$$

for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. In order to study the second integral $I_\infty^+(t, x)$, we introduce polar coordinates and rewrite

$$I_\infty^+(t, x) = \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(tr) \chi_\infty^\rho(r) (r^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{r^2 + |\rho|^2}} \int_{|\lambda|=r} d\sigma(\lambda) e^{-i\langle x, \lambda \rangle}. \quad (2.23)$$

Here the inner integral is a modified Bessel function. Specifically

$$\int_{|\lambda|=r} d\sigma(\lambda) e^{-i\langle x, \lambda \rangle} = r^{\frac{d}{2}} |x|^{\frac{2-d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(r|x|), \quad (2.24)$$

where $J_{(d-2)/2}$ denotes the classical Bessel function of the first kind. Since $I_\infty^+(t, x)$ vanishes if $tr < |\rho|$, we may restrict ourselves to $tr \geq |\rho|$, hence $r|x| \geq \frac{rt}{2} \geq \frac{|\rho|}{2}$. Then from (2.9), there exist constants C_d^+ and C_d^- such that

$$J_{\frac{d-2}{2}}(r|x|) = C_d^+(r|x|)^{-1/2} e^{ir|x|} + C_d^-(r|x|)^{-1/2} e^{-ir|x|} + R(r|x|), \quad (2.25)$$

where the remainder $R(r|x|)$ is $O((r|x|)^{-\frac{3}{2}})$. Substituting (2.24) and (2.25) in (2.23) implies

$$\begin{aligned} I_\infty^+(t, x) &= I_\infty^{+,1}(t, x) + I_\infty^{+,2}(t, x) + I_\infty^{+,3}(t, x) \\ &= C_d^+ |x|^{-\frac{d-1}{2}} \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(tr) \chi_\infty^\rho(r) (r^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} r^{\frac{d-1}{2}} e^{it\sqrt{r^2 + |\rho|^2}} e^{i|x|r} \\ &\quad + C_d^- |x|^{-\frac{d-1}{2}} \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(tr) \chi_\infty^\rho(r) (r^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} r^{\frac{d-1}{2}} e^{it\sqrt{r^2 + |\rho|^2}} e^{-i|x|r} \\ &\quad + |x|^{-\frac{d-2}{2}} \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(tr) \chi_\infty^\rho(r) (r^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} r^{\frac{d}{2}} e^{it\sqrt{r^2 + |\rho|^2}} R(r|x|). \end{aligned}$$

On the one hand, the last integral is estimated as follows :

$$|I_\infty^{+,3}(t, x)| \lesssim |x|^{-\frac{d+1}{2}} \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(tr) \chi_\infty^\rho(r) r^{-2},$$

for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. Hence

$$|I_\infty^{+,3}(t, x)| \lesssim |x|^{-\frac{d+1}{2}} \int_{|\rho|}^{+\infty} dr r^{-2} \lesssim |x|^{-\frac{d+1}{2}} \quad (2.26)$$

for large time and

$$|I_\infty^{+,3}(t, x)| \lesssim |x|^{-\frac{d+1}{2}} \int_{|\rho|t^{-1}}^{+\infty} dr r^{-2} \lesssim t|x|^{-\frac{d+1}{2}} \lesssim |x|^{-\frac{d-1}{2}} \quad (2.27)$$

for small time.

On the other hand, in order to estimate $I_\infty^{+,1}(t, x)$ and $I_\infty^{+,2}(t, x)$, it is sufficient to study the integral

$$\tilde{I}_\infty^+(t, x) = \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) (r^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} r^{\frac{d-1}{2}} e^{it\sqrt{r^2 + |\rho|^2}} e^{\pm i|x|r}.$$

Notice that

$$\chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) = \begin{cases} \chi_\infty^\rho(r) & \text{if } t \geq 2, \\ \chi_\infty^\rho(tr) & \text{if } t \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.28)$$

We split up $\tilde{I}_\infty^+(t, x)$ into three parts, corresponding to the decomposition

$$\tilde{I}_\infty^+(t, x) = \tilde{I}_\infty^{+,1}(t, x) + \tilde{I}_\infty^{+,2}(t, x) + \tilde{I}_\infty^{+,3}(t, x)$$

where

$$\tilde{I}_\infty^{+,1}(t, x) = \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) (r^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} r^{\frac{d-1}{2}} \{e^{it\sqrt{r^2+|\rho|^2}} - e^{itr}\} e^{\pm i|x|r},$$

$$\tilde{I}_\infty^{+,2}(t, x) = \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) r^{\frac{d-1}{2}} \{(r^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} - r^{-\sigma}\} e^{i(t\pm|x|)r},$$

and

$$\tilde{I}_\infty^{+,3}(t, x) = \int_0^{+\infty} dr \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) r^{-1-i\operatorname{Im}\sigma} e^{i(t\pm|x|)r},$$

for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re}\sigma = \frac{d+1}{2}$.

Estimates of $\tilde{I}_\infty^{+,1}$ and $\tilde{I}_\infty^{+,2}$. The first two parts are easily estimated. By using

$$e^{it\sqrt{r^2+|\rho|^2}} - e^{itr} = O\left(\frac{t}{r}\right) \quad \text{and} \quad (r^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} - r^{-\sigma} = O(r^{-\operatorname{Re}\sigma-2})$$

for all $r \in \operatorname{supp} \chi_\infty^\rho$, we obtain

$$\tilde{I}_\infty^{+,1}(t, x) = O(t) \quad \text{and} \quad \tilde{I}_\infty^{+,2}(t, x) = O(1) \quad (2.29)$$

for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re}\sigma = \frac{d+1}{2}$.

Estimate of $\tilde{I}_\infty^{+,3}$. We claim that

$$|\tilde{I}_\infty^{+,3}(t, x)| \lesssim \underbrace{|\operatorname{Im}\sigma| + \frac{1}{|\operatorname{Im}\sigma|}}_{C_\sigma}. \quad (2.30)$$

Denoting by $\xi = t \pm |x|$, we divide our estimate into two parts, depending whether $|\xi| \geq \frac{1}{2|\rho|}$ or not.

- If $|\xi| \geq \frac{1}{2|\rho|}$, we perform an integration by parts based on $e^{i\xi r} = \frac{1}{i\xi} \frac{\partial}{\partial r} e^{i\xi r}$. Then

$$\tilde{I}_\infty^{+,3}(t, x) = \frac{i}{\xi} \int_0^{+\infty} dr e^{i\xi r} \frac{\partial}{\partial r} \{\chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) r^{-1-i\operatorname{Im}\sigma}\}. \quad (2.31)$$

If the derivative hits either $\chi_\infty^\rho(r)$ or $r^{-1-i\operatorname{Im}\sigma}$, then the corresponding contributions to (2.31) are bounded by

$$C(1 + |\operatorname{Im}\sigma|).$$

If the derivative hits $\chi_\infty^\rho(tr)$, which matters only in the case $t < 2$, according to (2.28), then the corresponding contribution to (2.31) is bounded by

$$Ct \int_{|\rho|t^{-1}}^{2|\rho|t^{-1}} dr r^{-1} < 2(\ln 2)C.$$

Hence $\tilde{I}_\infty^{+,3}(t, x) = O(1 + |\operatorname{Im}\sigma|)$ for all $t > 0$ and $x \in \mathfrak{a}$ satisfying $\frac{|x|}{t} \geq \frac{1}{2}$ and $|t \pm |x|| \geq \frac{1}{2|\rho|}$.

- If $|\xi| < \frac{1}{2|\rho|}$, we split up

$$\tilde{I}_\infty^{+,3}(t, x) = \left(\int_0^{\frac{1}{|\xi|}} + \int_{\frac{1}{|\xi|}}^{+\infty} \right) dr \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) r^{-1-i \operatorname{Im} \sigma} e^{i\xi r},$$

We estimate both terms by performing different integration by parts. On the one hand,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{|\xi|}} dr r^{-1-i \operatorname{Im} \sigma} \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) e^{i\xi r} \\ &= \frac{i}{\operatorname{Im} \sigma} \underbrace{r^{-i \operatorname{Im} \sigma} \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) e^{i\xi r} \Big|_{r=0}^{r=\frac{1}{|\xi|}}}_{= O(1)} - \frac{i}{\operatorname{Im} \sigma} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{|\xi|}} dr r^{-i \operatorname{Im} \sigma} \frac{\partial}{\partial r} \{ \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) e^{i\xi r} \}}_{= O(1) \quad (*)} \\ &= O\left(\frac{1}{|\operatorname{Im} \sigma|}\right). \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{|\xi|}}^{+\infty} dr e^{i\xi r} \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) r^{-1-i \operatorname{Im} \sigma} \\ &= \frac{1}{i\xi} \underbrace{e^{i\xi r} \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) r^{-1-i \operatorname{Im} \sigma} \Big|_{r=\frac{1}{|\xi|}}^{r=+\infty}}_{= O(1)} + \frac{i}{\xi} \underbrace{\int_{\frac{1}{|\xi|}}^{+\infty} dr e^{i\xi r} \frac{\partial}{\partial r} \{ \chi_\infty^\rho(r) \chi_\infty^\rho(tr) r^{-1-i \operatorname{Im} \sigma} \}}_{= O(1+|\operatorname{Im} \sigma|) \quad (**)} \\ &= O(1 + |\operatorname{Im} \sigma|). \end{aligned}$$

Let us explain the estimates (*) and (**). In both cases, the derivative $\frac{\partial}{\partial r}$ produces 3 or 2 terms, depending whether $t \in (\frac{1}{2}, 2)$ or not. The contributions of $\frac{\partial}{\partial r} e^{i\xi r} = i\xi e^{i\xi r}$ to (*) and of $\frac{\partial}{\partial r} r^{-1-i \operatorname{Im} \sigma} = -(1+i \operatorname{Im} \sigma) r^{-2-i \operatorname{Im} \sigma}$ to (**) are easily dealt with. The contribution of $\frac{\partial}{\partial r} \chi_\infty^\rho(r)$, whose support is contained in the interval $[|\rho|, 2|\rho|]$, to (*) is obviously bounded, while its contribution to (**) vanishes, as $\frac{1}{|\xi|} > 2|\rho|$. Consider finally the contributions of $\frac{\partial}{\partial r} \chi_\infty^\rho(tr) = t(\chi_\infty^\rho)'(tr)$ when t is small. Regarding (*), it is easily estimated by $t \int_{|\rho|t^{-1}}^{2|\rho|t^{-1}} dr = |\rho|$. Regarding (**), notice that it vanishes unless $|\xi| \geq \frac{t}{2|\rho|}$. In this case, it is estimated by

$$\frac{t}{|\xi|} \int_{|\rho|t^{-1}}^{2|\rho|t^{-1}} dr r^{-1} \leq 2|\rho| \ln 2.$$

This concludes the estimate of (2.30).

We deduce from (2.29) and (2.30) that

$$\tilde{I}_\infty^+(t, x) = O(t + C_\sigma).$$

By combining this estimate with (2.26) and (2.27), we get next

$$|I_\infty^+| \lesssim C_\sigma |x|^{-\frac{d-1}{2}} \lesssim C_\sigma t^{-\frac{d-1}{2}},$$

if t is small and

$$|I_\infty^+| \lesssim C_\sigma (t|x|^{-\frac{d-1}{2}} + |x|^{-\frac{d+1}{2}}) \lesssim C_\sigma t^{-N} (1 + |x|)^{N-\frac{d-3}{2}},$$

if t is large, for any $N \in \mathbb{N}$. Together with the estimate of I_∞^- , this allows us to conclude the proof of [Theorem 2.3.3](#) in the case $\frac{|x|}{t} \geq \frac{1}{2}$. \square

Remark 2.3.5. *This proof relies on the expression (2.6) of spherical functions, which is available if G is complex but not in general.*

Proof for $\frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{2}$. Substituting the expressions (2.3) of φ_λ and (2.8) of $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ implies

$$\widetilde{\omega}_t^{\sigma, \infty}(x) = \text{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma((d+1)/2 - \sigma)} \int_K dk e^{\langle \rho, A(xk) \rangle} \underbrace{\int_a d\lambda \chi_\infty^\rho(\lambda) \pi^2(\lambda) (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\psi(\lambda)}}_{=\widetilde{II}_\infty(t, x)}.$$

Since $\frac{|A(xk)|}{t} \leq \frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{2}$, we know from (2.13) that the critical point λ_0 of ψ satisfies $|\lambda_0| < \frac{|\rho|}{\sqrt{3}}$. Hence ψ has no critical point in the support of χ_∞^ρ , and $\widetilde{II}_\infty(t, x)$ makes sense after several integrations by parts based on (2.21).

Consider first the large time case where $t \geq 1$. After performing N integrations by parts based on (2.21), $\widetilde{II}_\infty(t, x)$ becomes

$$\widetilde{II}_\infty(t, x) = \text{const.} (it)^{-N} \int_a d\lambda e^{it\psi(\lambda)} \left\{ - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \circ \frac{\lambda_j}{\tilde{\psi}(\lambda)} \right\}^N \left\{ \chi_\infty^\rho(\lambda) \pi^2(\lambda) (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \right\}.$$

If some derivatives hit $\chi_\infty^\rho(\lambda)$, then the range of integration reduces to a spherical shell where $|\lambda| \asymp |\rho|$ and we obtain the bound $O(t^{-N})$. Otherwise, since (in the support of χ_∞^ρ) $\lambda_j (\tilde{\psi}(\lambda))^{-1}$, $\pi^2(\lambda)$ and $(|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}}$ are inhomogeneous symbols of order 0, $2|\Sigma^+|$ and $-\text{Re } \sigma = -\frac{d+1}{2}$ respectively, we have

$$|\widetilde{II}_\infty(t, x)| \lesssim t^{-N} \int_a d\lambda \chi_\infty(\lambda) |\lambda|^{2|\Sigma^+| - \text{Re } \sigma - N} \lesssim t^{-N}$$

provided that $N > \text{Re } \sigma = \frac{d+1}{2}$. Hence, for all $t \geq 1$ such that $\frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{2}$,

$$|\widetilde{\omega}_t^{\sigma, \infty}(x)| \lesssim t^{-N} \int_K dk e^{\langle \rho, A(xk) \rangle} = t^{-N} \varphi_0(x),$$

for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\text{Re } \sigma = \frac{d+1}{2}$, and for every integer $N > \frac{d+1}{2}$.

Notice that the same argument implies similar estimates in small time with $t^{-\frac{d+1}{2}}$, where the negative power is too large. In order to reduce it to $t^{-\frac{d-1}{2}}$, we split up $\widetilde{II}_\infty(t, x)$ into two parts

$$\begin{aligned} \widetilde{II}_\infty(t, x) &= \widetilde{II}_\infty^-(t, x) + \widetilde{II}_\infty^+(t, x) \\ &= \int_a d\lambda \chi_0^\rho(t\lambda) \chi_\infty^\rho(\lambda) \pi^2(\lambda) (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\psi(\lambda)} \\ &\quad + \int_a d\lambda \chi_\infty^\rho(t\lambda) \chi_\infty^\rho(\lambda) \pi^2(\lambda) (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\psi(\lambda)}, \end{aligned}$$

where $\widetilde{II}_\infty^-(t, x)$ is easily estimated :

$$|\widetilde{II}_\infty^-(t, x)| \lesssim \int_{|\rho| \leq |\lambda| \leq 2|\rho|t^{-1}} d\lambda |\lambda|^{2|\Sigma^+| - \text{Re } \sigma} \lesssim t^{-2|\Sigma^+| + \text{Re } \sigma - \ell} = t^{-\frac{d-1}{2}}, \quad (2.32)$$

for all $0 < t < 1$ and for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\text{Re } \sigma = \frac{d+1}{2}$. After M integrations by parts based on (2.21), $\widetilde{II}_\infty^+(t, x)$ becomes

$$\widetilde{II}_\infty^+(t, x) = \text{const.} (it)^{-M} \int_a d\lambda e^{it\psi(\lambda)} \left\{ - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \circ \frac{\lambda_j}{\tilde{\psi}(\lambda)} \right\}^M \left\{ \chi_\infty^\rho(t\lambda) \chi_\infty^\rho(\lambda) \pi^2(\lambda) (|\lambda|^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \right\}.$$

Hence

$$|\widetilde{II}_\infty^+(t, x)| \lesssim t^{-M} \int_{|\lambda| \geq |\rho|t^{-1}} d\lambda |\lambda|^{2|\Sigma^+| - \text{Re } \sigma - M} \lesssim t^{-M} \int_{r \geq |\rho|t^{-1}} \frac{dr}{r} r^{2|\Sigma^+| - \text{Re } \sigma - M + \ell}.$$

Therefore, for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$, we have

$$|\widetilde{II}_\infty^+(t, x)| \lesssim t^{-M} t^{-d+\operatorname{Re} \sigma + M} = t^{-\frac{d-1}{2}} \quad (2.33)$$

provided that $M > \frac{d-1}{2}$. From (2.32) and (2.33), we deduce that

$$|\widetilde{\omega}_t^{\sigma, \infty}(x)| \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}} \int_K dk e^{\langle \rho, A(xk) \rangle} = t^{-\frac{d-1}{2}} \varphi_0(x),$$

for all $0 < t < 1$ such that $\frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{2}$ and for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. Thus we have proved the last case, and the proof of [Theorem 2.3.3](#) is complete. \square

Remark 2.3.6. *In the last proof, we have used the integral expression (2.3) of the spherical function $\varphi_\lambda(x)$, which holds in general, and the particular expression (2.8) of the Plancherel density $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ when G is complex. In general, $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ is not a polynomial, nor even an inhomogeneous symbol of order $d - \ell$, which is known to be a major difficulty in higher rank analysis.*

2.4 Dispersive estimates

In this section, we prove our main result about the $L^{q'}\text{-}L^q$ estimates for the operator $W_t^\sigma = \widetilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$. We introduce the following criterion based on the Kunze-Stein phenomenon, which is a straightforward generalization of [\[APV11, Theorem 4.2\]](#) and which is crucial for our dispersive estimates.

Lemma 2.4.1. *Let κ be a reasonable K -bi-invariant function on G . Then*

$$\|\cdot * \kappa\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \leq \left\{ \int_G dx \varphi_0(x) |\kappa(x)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}}$$

for any $q \in [2, +\infty)$.

Proof. For $s \in [2, +\infty)$, we define \mathcal{A}_s as the space of all K -bi-invariant functions on G such that

$$\int_G dx \varphi_0(x) |\kappa(x)|^{s/2} < \infty.$$

Given κ in \mathcal{A}_s , we set

$$\|\kappa\|_{\mathcal{A}_s} = \left(\int_G dx \varphi_0(x) |\kappa(x)|^{s/2} \right)^{2/s}.$$

For $s = +\infty$, we denote by \mathcal{A}_∞ the space of $L^\infty(G, dx)$ K -bi-invariant functions on G and by $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\infty}$ the L^∞ -norm. We show in the following that, for any $q \in [2, +\infty]$, we have

$$L^{q'}(G) * \mathcal{A}_q \subset L^q(G),$$

which yields our lemma. The case where $q = 2$ follows by Herz's criterion (see [\[Cow97\]](#)) :

$$\|\cdot * \kappa\|_{L^2(G) \rightarrow L^2(G)} \leq \int_G dx \varphi_0(x) |\kappa(x)| = \|\kappa\|_{\mathcal{A}_2}$$

for every κ in \mathcal{A}_2 . When $q = +\infty$, taking f in $L^1(G)$ and κ in \mathcal{A}_∞ , we have that for every \mathbb{X} in G ,

$$|f * \kappa(x)| \leq \int_G dy |f(y)| |\kappa(y^{-1}x)| \leq \|\kappa\|_{\mathcal{A}_\infty} \|f\|_{L^1(G)}.$$

By interpolation between the cases $q = 2$ and $q = \infty$, we obtain that

$$[L^2(G), L^1(G)]_\theta * [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_\infty]_\theta \subset [L^2(G), L^\infty(G)]_\theta$$

with $\theta = 2/q$. On the one hand,

$$[L^2(G), L^1(G)]_\theta = L^{q'}(G) \quad \text{and} \quad [L^2(G), L^\infty(G)]_\theta = L^q(G).$$

On the other hand, since

$$[L^1(G, \varphi_0 dx), L^\infty(G, \varphi_0 dx)]_\theta = L^{q/2}(G, \varphi_0 dx),$$

we have $[\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_\infty]_\theta = \mathcal{A}_q$. This concludes the proof of [Lemma 2.4.1](#). \square

2.4.1 Small time dispersive estimate

Theorem 2.4.2. *Assume that $0 < |t| < 1$, $2 < q < +\infty$ and $\sigma = (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Then*

$$\|\widetilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}.$$

Proof. We divide the proof into two parts, corresponding to the kernel decomposition $\omega_t^\sigma = \omega_t^{\sigma,0} + \omega_t^{\sigma,\infty}$. According to [Lemma 2.4.1](#), we have

$$\|\cdot * \omega_t^{\sigma,0}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \leq \left\{ \int_G dx \varphi_0(x) |\omega_t^{\sigma,0}(x)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}}.$$

By using the Cartan decomposition, together with the fact that $\delta(H) \lesssim e^{2\langle \rho, H \rangle}$, we obtain

$$\int_G dx \varphi_0(x) |\omega_t^{\sigma,0}(x)|^{\frac{q}{2}} \lesssim \int_{\mathfrak{a}^+} dH \varphi_0(H) |\omega_t^{\sigma,0}(H)|^{\frac{q}{2}} e^{2\langle \rho, H \rangle}.$$

According to [Theorem 2.3.1](#) and to the estimate (2.4) of the ground spherical function φ_0 , we obtain next

$$\int_{\mathfrak{a}^+} dH \varphi_0(H) |\omega_t^{\sigma,0}(H)|^{\frac{q}{2}} e^{2\langle \rho, H \rangle} \lesssim \int_{\mathfrak{a}^+} dH (1 + |H|)^{\frac{q}{2}+1} e^{-(\frac{q}{2}-1)\langle \rho, H \rangle} < +\infty$$

for any $q \in (2, +\infty)$. Hence

$$\|\cdot * \omega_t^{\sigma,0}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} < +\infty.$$

For the second part $\omega_t^{\sigma,\infty}$, we use an analytic interpolation between L^2 - L^2 and L^1 - L^∞ estimates for the family of operators $\widetilde{W}_t^{\sigma,\infty}$ defined by (2.11) in the vertical strip $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$. When $\operatorname{Re} \sigma = 0$, the spectral theorem yields

$$\|\widetilde{W}_t^{\sigma,\infty}\|_{L^2(\mathbb{X}) \rightarrow L^2(\mathbb{X})} \lesssim \|e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}\|_{L^2(\mathbb{X}) \rightarrow L^2(\mathbb{X})} = 1.$$

for all $t \in \mathbb{R}^*$. When $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$, [Theorem 2.3.3](#) gives

$$\|\widetilde{W}_t^{\sigma,\infty}\|_{L^1(\mathbb{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{X})} \lesssim \|\widetilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}}.$$

By applying Stein's interpolation theorem for an analytic family of operators, we obtain

$$\|\widetilde{W}_t^{\frac{d+1}{2}(1-\theta), \infty}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)},$$

with $\theta = \frac{2}{q}$. In conclusion,

$$\|W_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})},$$

for $0 < |t| < 1$, $2 < q < +\infty$ and $\sigma = (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. \square

2.4.2 Large time dispersive estimate

Theorem 2.4.3. *Assume that $|t| \geq 1$, $2 < q < +\infty$ and $\sigma = (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Then*

$$\|\widetilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}}.$$

Proof. We divide the proof into three parts, corresponding to the kernel decomposition

$$\omega_t^\sigma = \mathbf{1}_{B(0, \frac{|t|}{2})} \omega_t^{\sigma, 0} + \mathbf{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, \frac{|t|}{2})} \omega_t^{\sigma, 0} + \omega_t^{\sigma, \infty}.$$

By using [Lemma 2.4.1](#) and [Theorem 2.3.1](#), we have

$$\begin{aligned} \|\cdot * \{\mathbf{1}_{B(0, \frac{|t|}{2})} \omega_t^{\sigma, 0}\}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} & \\ & \lesssim \left\{ \int_{\{H \in \mathfrak{a}^+ : 0 < |H| < \frac{|t|}{2}\}} dH \varphi_0(H) |\omega_t^{\sigma, 0}(H)|^{\frac{2}{q}} e^{2\langle \rho, H \rangle} \right\}^{\frac{2}{q}} \\ & \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \underbrace{\left\{ \int_{|H| < \frac{|t|}{2}} dH (1 + |H|)^{\frac{d}{2}(d+1)} e^{-(\frac{d}{2}-1)\langle \rho, H \rangle} \right\}^{\frac{2}{q}}}_{< +\infty} \end{aligned}$$

and

$$\|\cdot * \{\mathbf{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, \frac{|t|}{2})} \omega_t^{\sigma, 0}\}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim \left\{ \int_{|H| \geq \frac{|t|}{2}} dH (1 + |H|)^{\frac{d}{2}(d+1)} e^{-(\frac{d}{2}-1)\langle \rho, H \rangle} \right\}^{\frac{2}{q}},$$

which is $O(|t|^{-N})$, for any $N \in \mathbb{N}$. Instead of $\omega_t^{\sigma, \infty}$, we consider again the kernel $\widetilde{\omega}_t^{\sigma, \infty}$. The associated operators satisfy

$$\|\widetilde{W}_t^{\sigma, \infty}\|_{L^1(\mathbb{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{X})} \lesssim t^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

when $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$, according to [Theorem 2.3.3](#). By applying Stein's interpolation theorem for an analytic family of operators and by summing up these estimates, we obtain

$$\|W_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}},$$

for $|t| \geq 1$, $2 < q < +\infty$ and $\sigma = (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. □

Remark 2.4.4. *The standard TT^* method used to prove the Strichartz inequality breaks down in the critical case. The dyadic decomposition method carried out in [KeTa98] takes care of the endpoints, but it requires a stronger dispersive property than [Theorem 2.4.2](#) in small time, namely our main theorem.*

Proof of [Theorem 2.1.3](#). It follows from [Theorem 2.4.2](#), [Theorem 2.4.3](#) and the L^q kernel estimate

$$\|\omega_t^\sigma\|_{L^q(\mathbb{X})} \leq \|\omega_t^{\sigma, 0}\|_{L^q(\mathbb{X})} + \|\widetilde{\omega}_t^{\sigma, \infty}\|_{L^q(\mathbb{X})} \lesssim \begin{cases} |t|^{-\frac{d-1}{2}}, & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{d}{2}}, & \text{if } |t| \geq 1, \end{cases}$$

for $2 < q < +\infty$ and $\sigma = \frac{d+1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Indeed, by using standard interpolation arguments between

$$\begin{cases} \|W_t^\sigma\|_{L^1(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim \|\omega_t^\sigma\|_{L^q(\mathbb{X})} \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}}, \\ \|W_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{X})} \lesssim \|\omega_t^\sigma\|_{L^q(\mathbb{X})} \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}}, \\ \|W_t^\sigma\|_{L^2(\mathbb{X}) \rightarrow L^2(\mathbb{X})} = 1, \end{cases}$$

for small time and

$$\begin{cases} \|W_t^\sigma\|_{L^1(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim \|\omega_t^\sigma\|_{L^q(\mathbb{X})} \lesssim t^{-\frac{d}{2}}, \\ \|W_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{X})} \lesssim \|\omega_t^\sigma\|_{L^q(\mathbb{X})} \lesssim t^{-\frac{d}{2}}, \\ \|W_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}}, \end{cases}$$

for large time, we conclude. □

2.5 Strichartz inequality and applications

Let $\sigma \in \mathbb{R}$ and $1 < q < \infty$. Recall that the Sobolev space $H^{\sigma,q}(\mathbb{X})$ is the image of $L^q(\mathbb{X})$ under the operator $(-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}}$, equipped with the norm

$$\|f\|_{H^{\sigma,q}(\mathbb{X})} = \|(-\Delta_{\mathbb{X}})^{\frac{\sigma}{2}} f\|_{L^q(\mathbb{X})}.$$

If $\sigma = N$ is a nonnegative integer, then $H^{\sigma,q}(\mathbb{X})$ coincides with the classical Sobolev space

$$W^{N,q}(\mathbb{X}) = \{f \in L^q(\mathbb{X}) \mid \nabla_a^j f \in L^q(\mathbb{X}), \forall 1 \leq j \leq N\},$$

defined by means of covariant derivatives. The following Sobolev embedding theorem is used in next subsection.

Theorem 2.5.1. *Let $1 < q_1, q_2 < \infty$ and $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ such that $\sigma_1 - \sigma_2 \geq \frac{d}{q_1} - \frac{d}{q_2} \geq 0$. Then*

$$H^{\sigma_1, q_1}(\mathbb{X}) \subset H^{\sigma_2, q_2}(\mathbb{X}). \quad (2.34)$$

We refer to [Tri92] for more details about function spaces on Riemannian manifolds. Let us state next the Strichartz inequality and some applications. The proofs are adapted straightforwardly from [APV12; AnPi14] and are therefore omitted.

2.5.1 Strichartz inequality

Recall the linear inhomogeneous wave equation on \mathbb{X} :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{X}} u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (2.35)$$

whose solution is given by Duhamel's formula :

$$u(t, x) = (\cos t \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}) u_0(x) + \frac{\sin t \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}} u_1(x) + \int_0^t \frac{\sin(t-s) \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}} F(s, x) ds.$$

We consider first the case $d \geq 4$ and discuss the 3-dimensional case in the final remark. Recall that a couple (p, q) is called admissible if $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ belongs to the triangle

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} \geq \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

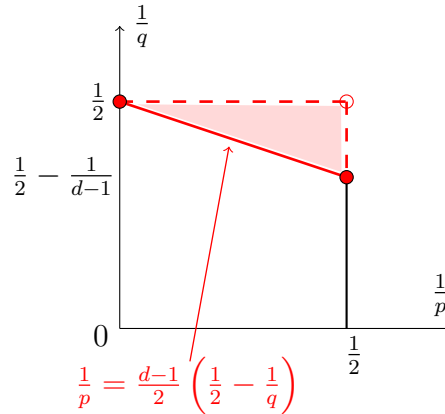


FIGURE 2.1 – Admissibility in dimension $d \geq 4$.

Theorem 2.5.2. *Let (p, q) and (\tilde{p}, \tilde{q}) be two admissible couples, and let*

$$\sigma \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma} \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right).$$

Then all solutions u to the Cauchy problem (2.35) satisfy the following Strichartz inequality :

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{X}} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{X}))} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{X})} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{X})} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}(\mathbb{X}))}. \quad (2.36)$$

The admissible range in (2.36) can be widened by using the Sobolev embedding theorem.

Corollary 2.5.3. *Assume that (p, q) and (\tilde{p}, \tilde{q}) are two couples corresponding to the square*

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

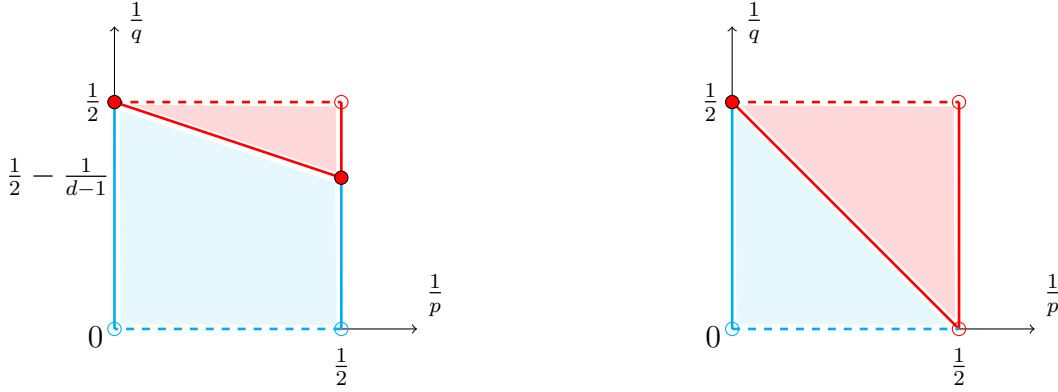


FIGURE 2.2 – Admissibility in dimension $d \geq 4$ and $d = 3$.

Let $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{R}$ such that $\sigma \geq \sigma(p, q)$, where

$$\sigma(p, q) = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) + \max \left\{ 0, \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} \right\},$$

and similarly $\tilde{\sigma} \geq \sigma(\tilde{p}, \tilde{q})$. Then the Strichartz inequality (2.36) holds for all solutions to the Cauchy problem (2.35).

Remark 2.5.4. *Theorem 2.5.2 and Corollary 2.5.3 still hold true in lower dimension $d = 3$ with similar proofs. But the endpoint $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{d-1})$ is excluded from the admissible triangle in this case.*

2.5.2 Global well-posedness for the semilinear wave equation

We refer to [APV12; AnPi14] for more detailed proofs of the following well-posedness results. By using the classical fixed point scheme with the previous Strichartz inequality, one obtains the global well-posedness for the semilinear equation

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{X}} u(t, x) = F_\gamma(u(t, x)), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (2.37)$$

on \mathbb{X} with power-like nonlinearities F satisfying

$$|F_\gamma(u)| \lesssim |u|^\gamma \quad \text{and} \quad |F_\gamma(u) - F_\gamma(v)| \lesssim (|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1}) |u - v| \quad \forall \gamma > 1$$

and small initial data u_0 and u_1 . For every $d \geq 3$, consider the following powers

$$\gamma_1 = 1 + \frac{3}{d}, \quad \gamma_2 = 1 + \frac{2}{\frac{d-1}{2} + \frac{2}{d-1}}, \quad \gamma_3 = \begin{cases} 1 + \frac{4}{d-2} & \text{if } d \leq 5, \\ \frac{d-1}{2} + \frac{3}{d+1} - \sqrt{\left(\frac{d-3}{2} + \frac{3}{d+1}\right)^2 - 4\frac{d-1}{d+1}} & \text{if } d \geq 6, \end{cases}$$

and the following curves

$$\sigma_1(\gamma) = \frac{d+1}{4} - \frac{(d+1)(d+5)}{8d} \frac{1}{\gamma - \frac{d+1}{2d}}, \quad \sigma_2(\gamma) = \frac{d+1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad \sigma_3(\gamma) = \frac{d}{2} - \frac{2}{\gamma-1}.$$

In dimension $d \geq 3$, the equation (2.37) is globally well-posed for small initial data in $H^\sigma(\mathbb{X}) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{X})$ provided that

$$\begin{cases} \sigma > 0 & \text{if } 1 < \gamma \leq \gamma_1, \\ \sigma \geq \sigma_1(\gamma) & \text{if } \gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2, \\ \sigma \geq \sigma_2(\gamma) & \text{if } \gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_c(d), \\ \sigma \geq \sigma_3(\gamma) & \text{if } \gamma_c(d) \leq \gamma \leq \gamma_3. \end{cases}$$

Observe that one obtains the same global well-posedness results on noncompact symmetric spaces of arbitrary rank with G complex as on real hyperbolic spaces, without further assumptions.

2.6 Further results on locally symmetric spaces

Let Γ be a discrete torsion-free subgroup of G . The locally symmetric space $\Gamma \backslash \mathbb{X}$, equipped with the Riemannian structure inherited from \mathbb{X} becomes a Riemannian manifold. Consider the Poincaré series

$$P_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)}, \quad s > 0, \quad x, y \in \mathbb{X},$$

and denote by $\delta(\Gamma) = \inf\{s > 0 \mid P_s(x, y) < +\infty\}$ its critical exponent. In [Zhw19], the author has studied the wave equation and has obtained similar Strichartz inequality and global well-posedness results as in Sect. 2.5, in the case where $\Gamma \backslash \mathbb{X}$ is a rank one locally symmetric space such that Γ is convex cocompact and $\delta(\Gamma) < |\rho|$. Recall that, in the rank one setting, Γ is called convex cocompact if the quotient group $\Gamma \backslash \text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ is compact, where $\text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ is the convex hull of the limit set Λ_Γ of Γ . While this notion yields many interesting examples in rank one, it is known to yield a rather limited class in higher rank (see [KILe06] and [Qui05] for more details).

However, thanks to our wave kernel estimates Theorem 2.3.1 and Theorem 2.3.3, we can study along the lines of [Zhw19] the wave equation on higher rank noncompact locally symmetric spaces, under slightly different assumptions :

- (1) G is complex,
- (2) $\delta(\Gamma) < |\rho|$,
- (3) there exists $C > 0$ such that for all $x, y \in \mathbb{X}$, $P_s(x, y) \leq CP_s(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

The first assumption ensures sharp wave kernel estimates on \mathbb{X} , from which we can deduce wave kernel estimates on $\Gamma \backslash \mathbb{X}$. Notice that such information is still lacking for G real. The second assumption plays the same role as in rank one. On the one hand, it ensures that the wave kernel on $\Gamma \backslash \mathbb{X}$ is well defined. On the other hand, there is a L^2 Kunze-Stein phenomenon under this assumption. In order to get the desired dispersive estimates on $\Gamma \backslash \mathbb{X}$, a uniform upper bound of the Poincaré series is required. Notice that we could deduce the last condition (3) from the convex cocompactness of Γ in rank one. We refer to [Zhw19] and the references therein for more details about wave type equations on locally symmetric spaces.

Chapitre 3

Wave equation on general noncompact Riemannian symmetric spaces

Ce chapitre reprend l'article [AnZh20b] écrit en commun avec Jean-Philippe Anker et soumis à la revue.

Résumé : Dans ce chapitre, nous établissons les estimations ponctuelles du noyau et les propriétés dispersives pour l'équation des ondes sur les espaces symétriques de type non compact et de rang général. Ceci est réalisé en combinant la méthode de la phase stationnaire et la paramétrix de Hadamard, et en particulier, en introduisant une décomposition spectrale subtile, qui nous permet de surmonter une difficulté bien connue dans l'analyse de rang supérieur, à savoir le fait que la densité de Plancherel n'est pas un symbole différentiel en général. En conséquence, nous déduisons l'inégalité de Strichartz pour une grande famille de paires admissibles et en déduisons que, comme sur les espaces hyperboliques, l'équation semi-linéaire correspondante est globalement bien posée pour les données initiales de régularité faible.

This chapter resumes the article [AnZh20b] written in collaboration with Jean-Philippe and submitted to the journal.

Abstract : *In this chapter, We establish sharp pointwise kernel estimates and dispersive properties for the wave equation on noncompact symmetric spaces of general rank. This is achieved by combining the stationary phase method and the Hadamard parametrix, and in particular, by introducing a subtle spectral decomposition, which allows us to overcome a well-known difficulty in higher rank analysis, namely the fact that the Plancherel density is not a differential symbol in general. As consequences, we deduce the Strichartz inequality for a large family of admissible pairs and prove global well-posedness results for the corresponding semilinear equation with low regularity data as on hyperbolic spaces.*

Summary

3.1 Introduction	44
3.2 Preliminaries	45
3.2.1 Notations	45
3.2.2 Spherical Fourier analysis on symmetric spaces	46
3.2.3 Barycentric decomposition of the Weyl chamber	47
3.3 Pointwise estimates of the wave kernel	51
3.3.1 Estimates of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)$ when $ t $ is large and $\frac{ x }{ t }$ is sufficiently small.	52
3.3.2 Estimates of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)$ in the remaining range	58
3.3.3 Estimates of $\omega_t^{\sigma,\infty}$	63
3.4 Dispersive estimates	66
3.5 Strichartz inequality and applications	68
3.5.1 Strichartz inequality	68
3.5.2 Global well-posedness for the semilinear wave equation	69
3.6 Further results for Klein-Gordon equations	70

3.1 Introduction

This paper is devoted to prove time sharp kernel estimates and dispersive properties for the wave equation on noncompact symmetric spaces of higher rank. As consequences, we prove the Strichartz inequality and study their applications to associated semilinear Cauchy problems. Relevant theories are well established on Euclidean spaces, see for instance [Kap94; LiSo95; GLS97; KeTa98; DGK01], and the references therein.

Given the rich Euclidean results, several works have been made in other settings. We are interested in Riemannian symmetric spaces of noncompact type, where relevant questions are now well answered in rank one, see for instance [Fon97; Ion00b; Tat01; MeTa11; MeTa12; APV12; AnPi14] on hyperbolic spaces, and [APV15] on Damek-Ricci spaces. A first study of the wave equation on general symmetric spaces of higher rank was carried out in [Has11], where some non optimal estimates were obtained under a strong smoothness assumption. Recently, time sharp kernel estimates and dispersive properties have been proven in [Zhw20] on noncompact symmetric spaces G/K , with G complex. In this case, the Harish-Chandra \mathfrak{c} -function and the spherical function have elementary expressions, which is not the case in general.

In this paper, we establish pointwise wave kernel estimates and dispersive properties for the wave equation on general noncompact symmetric spaces, which are sharp in time and which extend previous results obtained on real hyperbolic spaces [APV12; AnPi14] to higher rank. The main challenge is that the Plancherel density involved in the wave kernel is not a polynomial, nor even a differential symbol in general. To bypass this problem, we consider barycentric decompositions of the Weyl chambers into subcones and differentiate in each subcone along a well chosen direction.

For suitable $\sigma \in \mathbb{C}$, we consider the wave operator $W_t^\sigma = (-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$ associated to the Laplace-Beltrami operator $\Delta_{\mathbb{X}}$ on a d -dimensional noncompact symmetric space $\mathbb{X} = G/K$. To avoid possible singularities (see Sect. 3.3.2), we consider actually the analytic family of operators

$$\widetilde{W}_t^\sigma = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} (-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}} \quad (3.1)$$

in the vertical strip $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$. Let us denote by $\widetilde{\omega}_t^\sigma$ its K -bi-invariant convolution kernel. Our first main result is the following pointwise estimate, which summarizes Theorem 3.3.5, Theorem 3.3.9 and Theorem 3.3.12 proved in Sect. 3.3.

Theorem 3.1.1 (Pointwise kernel estimates). *Let $d \geq 3$ and $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. There exist $C > 0$ and $N \in \mathbb{N}$ such that the following estimates hold for all $t \in \mathbb{R}^*$ and $x \in \mathbb{X}$:*

$$|\widetilde{\omega}_t^\sigma(x)| \leq C(1 + |x^+|)^N e^{-\langle \rho, x^+ \rangle} \begin{cases} |t|^{-\frac{d-1}{2}} & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{D}{2}} & \text{if } |t| \geq 1, \end{cases}$$

where $x^+ \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ denotes the radial component of x in the Cartan decomposition, and $D = \ell + 2|\Sigma_r^+|$ is the so-called dimension at infinity of \mathbb{X} .

Remark 3.1.2. *These kernel estimates are sharp in time and similar results hold obviously in the easier case where $\operatorname{Re} \sigma > \frac{d+1}{2}$. The value of N will be specified in Sect. 3.3. However, the polynomial $(1 + |x^+|)^N$ is not crucial for further computations because of the exponential decay $e^{-\langle \rho, x^+ \rangle}$.*

By interpolation arguments, we deduce our second main result.

Theorem 3.1.3 (Dispersive property). *Assume that $d \geq 3$, $2 < q, \tilde{q} < +\infty$ and $\sigma \geq (d+1) \max(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})$. Then there exists a constant $C > 0$ such that following dispersive estimates hold :*

$$\|W_t^\sigma\|_{L^{\tilde{q}}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \leq C \begin{cases} |t|^{-(d-1) \max(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})} & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{D}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Remark 3.1.4. At the endpoint $q = \tilde{q} = 2$, $t \mapsto e^{it\sqrt{-\Delta}}$ is a one-parameter group of unitary operators on $L^2(\mathbb{X})$.

Remark 3.1.5. *Theorem 3.1.1 and Theorem 3.1.3 generalize earlier results obtained for real hyperbolic spaces [APV12; AnPi14] (which extend straightforwardly to all noncompact symmetric spaces of rank one), or for noncompact symmetric spaces G/K with G complex [Zhw20]. Notice that $D = 3$ in rank one and that $D = d$ if G is complex.*

Remark 3.1.6. For simplicity, we omit the 2-dimensional case where the small time bounds in *Theorem 3.1.1 and Theorem 3.1.3* involve an additional logarithmic factor, see [AnPi14, Theorem 3.2 and 4.2]. Notice that $d \geq 4$ in higher rank, see (3.2).

Let us sketch the proofs of our main results. We prove the dispersive properties of W_t^σ by using interpolation arguments based on pointwise estimates of $\tilde{\omega}_t^\sigma$, which are sharp in time. By the way, let us point out that the kernel analysis carried out on hyperbolic spaces [AnPi14] can not be extended straightforwardly in higher rank, since the Plancherel density is not a differential symbol in general. Consider the Poisson operator $\mathcal{P}_\tau = e^{-\tau\sqrt{-\Delta_x}}$, for all $\tau \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \tau \geq 0$. Along the lines of [Sch88; GiMe90; CGM02], we can write formally our wave operator (3.1) as

$$\tilde{W}_t^\sigma = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{+\infty} ds s^{\sigma-1} \mathcal{P}_{s-it}.$$

Our analysis is focused on kernel estimates of the Poisson operator \mathcal{P}_{s-it} where $s \in \mathbb{R}^+$ and $t \in \mathbb{R}^*$. We adopt different methods depending whether s , $|t|$ and $\frac{|x|}{|t|}$ ($x \in \mathbb{X}$) are small or large. Specifically,

- If s is bounded from above and $\frac{|x|}{|t|}$ is sufficiently small with $|t|$ large, we develop an effective stationary phase method based on barycentric decompositions of Weyl chambers described in Sect. 3.2.3. In each subdivision, the Plancherel density becomes a differential symbol for a well chosen directional derivative, see Sect. 3.3.1.
- If s is bounded from above but $\frac{|x|}{|t|}$ is large (with $|t|$ small or large), we estimate the kernel along the lines of [CGM01], where Cowling, Guilini and Meda have studied the Poisson operator \mathcal{P}_τ for $\tau \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \tau \geq 0$. Unfortunately, their estimates are not sharp when τ is large and nearly imaginary, which happens in our context when s is small and $|t|$ is large. To deal with this case, we resume and improve slightly their method by writing down more explicitly the Hadamard parametrix on noncompact symmetric spaces along the lines of [Bér77], see Sect. 3.3.2.
- If s is large, the kernel is estimated by using the standard stationary phase method, which is similar to the rank one analysis, see Sect. 3.3.3.

This paper is organized as follows. We recall spherical Fourier analysis on noncompact symmetric spaces and introduce the barycentric decomposition of Weyl chambers in Sect. 3.2. Next, we derive pointwise wave kernel estimates in Sect. 3.3. By using interpolation arguments, we prove in Sect. 3.4 the dispersive property for the wave operator. As consequences, we establish the Strichartz inequality for a large family of admissible pairs and obtain well-posedness results for the associated semilinear wave equation in Sect. 3.5. We give further results about the Klein-Gordon equation in Sect. 3.6.

3.2 Preliminaries

In this section, we first review briefly spherical Fourier analysis on noncompact symmetric spaces. Next we introduce a barycentric decomposition for Weyl chambers, which will be crucial for the forthcoming kernel estimates.

3.2.1 Notations

We adopt the standard notation and refer to [Hel78; Hel00] for more details. Let G be a semisimple Lie group, connected, noncompact, with finite center, and K be a maximal compact subgroup of G . The

homogeneous space $\mathbb{X} = G/K$ is a Riemannian symmetric space of noncompact type. Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ be the Cartan decomposition of the Lie algebra of G . There is a natural identification between \mathfrak{p} and the tangent space of \mathbb{X} at the origin. The Killing form of \mathfrak{g} induces a K -invariant inner product on \mathfrak{p} , hence a G -invariant Riemannian metric on \mathbb{X} .

Fix a maximal abelian subspace \mathfrak{a} in \mathfrak{p} . The rank of \mathbb{X} is the dimension ℓ of \mathfrak{a} . Let $\Sigma \subset \mathfrak{a}$ be the root system of $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ and denote by W the Weyl group associated to Σ . Once a positive Weyl chamber $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ has been selected, Σ^+ (resp. Σ_r^+ or Σ_s^+) denotes the corresponding set of positive roots (resp. positive reduced roots or simple roots). Let d be the dimension of \mathbb{X} and D be the dimension at infinity of \mathbb{X} :

$$d = \ell + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \quad \text{and} \quad D = \ell + 2|\Sigma_r^+|, \quad (3.2)$$

where m_α is the dimension of the positive root subspace \mathfrak{g}_α . Notice that one cannot compare d and D without specifying the geometric structure of \mathbb{X} . For example, when G is complex, we have $d = D$; but when \mathbb{X} has normal real form, we have $d = \ell + |\Sigma_r^+|$ which is strictly smaller than D . Since we focus on the higher rank analysis, we may assume that $d \geq 3$.

Let \mathfrak{n} be the nilpotent Lie subalgebra of \mathfrak{g} associated to Σ^+ and let $N = \exp \mathfrak{n}$ be the corresponding Lie subgroup of G . We have the decompositions

$$\begin{cases} G = N(\exp \mathfrak{a})K & \text{(Iwasawa),} \\ G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}^+})K & \text{(Cartan).} \end{cases}$$

In the Cartan decomposition, the Haar measure on G writes

$$\int_G f(x)dx = \text{const.} \int_K dk_1 \int_{\mathfrak{a}^+} dx^+ \delta(x^+) \int_K dk_2 f(k_1(\exp x^+)k_2),$$

with

$$\delta(x^+) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\sinh \alpha(x^+))^{m_\alpha} \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{\langle \alpha, x^+ \rangle}{1 + \langle \alpha, x^+ \rangle} \right\}^{m_\alpha} e^{\langle 2\rho, x^+ \rangle} \quad \forall x^+ \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

Here $\rho \in \mathfrak{a}^+$ denotes the half sum of all positive roots $\alpha \in \Sigma^+$ counted with their multiplicities m_α :

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha.$$

3.2.2 Spherical Fourier analysis on symmetric spaces

Let $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ be the Schwartz space of K -bi-invariant functions on G . The spherical Fourier transform \mathcal{H} is defined by

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_G dx \varphi_{-\lambda}(x)f(x) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}, \forall f \in \mathcal{S}(K \backslash G / K),$$

where $\varphi_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(K \backslash G / K)$ denotes the spherical function of index $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$, which is a smooth K -bi-invariant eigenfunction for all invariant differential operators on \mathbb{X} , in particular for the Laplace-Beltrami operator :

$$-\Delta \varphi_\lambda(x) = (|\lambda|^2 + |\rho|^2) \varphi_\lambda(x).$$

In the noncompact case, spherical functions have the integral representation

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K dk e^{\langle i\lambda + \rho, A(kx) \rangle} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}, \quad (3.3)$$

where $A(kx)$ denotes the \mathfrak{a} -component in the Iwasawa decomposition of kx . It satisfies the basic estimate

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq \varphi_0(x) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}, \forall x \in G,$$

where

$$\varphi_0(\exp x^+) \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} 1 + \langle \alpha, x^+ \rangle \right\} e^{-\langle \rho, x^+ \rangle} \quad \forall x^+ \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

Denote by $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$ the subspace of W -invariant functions in the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$. Then \mathcal{H} is an isomorphism between $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ and $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$. The inverse spherical Fourier transform is given by

$$f(x) = C_0 \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(x) \mathcal{H}f(\lambda) \quad \forall x \in G, \forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W,$$

where $C_0 > 0$ is a constant depending only on the geometric structure of \mathbb{X} , and which has been computed explicitly for instance in [AnJi99, Theorem 2.2.2]. By using the Gindikin & Karpelevič formula of the Harish-Chandra \mathbf{c} -function (see [Hel00] or [GaVa88]), we can write the Plancherel density as

$$|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} = \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} |\mathbf{c}_\alpha(\langle \alpha, \lambda \rangle)|^{-2}, \quad (3.4)$$

with

$$c_\alpha(v) = \frac{\Gamma(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{1}{2} m_\alpha)}{\Gamma(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} \frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{1}{4} m_\alpha + \frac{1}{2} m_{2\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} \frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{1}{4} m_\alpha)} \frac{\Gamma(iv)}{\Gamma(iv + \frac{1}{2} m_\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{i}{2} v + \frac{1}{4} m_\alpha)}{\Gamma(\frac{i}{2} v + \frac{1}{4} m_\alpha + \frac{1}{2} m_{2\alpha})}.$$

Since $|\mathbf{c}_\alpha|^{-2}$ is a homogeneous symbol on \mathbb{R} of order $m_\alpha + m_{2\alpha}$ for every $\alpha \in \Sigma_r^+$, then $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ is a product of one-dimensional symbols, but not a symbol on \mathfrak{a} in general. The Plancherel density satisfies

$$|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \asymp \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} \langle \alpha, \lambda \rangle^2 (1 + |\langle \alpha, \lambda \rangle|)^{m_\alpha + m_{2\alpha} - 2} \lesssim \begin{cases} |\lambda|^{D-\ell} & \text{if } |\lambda| \leq 1, \\ |\lambda|^{d-\ell} & \text{if } |\lambda| \geq 1, \end{cases}$$

together with all its derivatives.

3.2.3 Barycentric decomposition of the Weyl chamber

Let $\Sigma_s^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ be the set of positive simple roots, and let $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell\}$ be the dual basis of \mathfrak{a} , which is defined by

$$\langle \alpha_j, \Lambda_k \rangle = \delta_{jk} \quad \forall 1 \leq j, k \leq \ell. \quad (3.5)$$

Notice that $\overline{\mathfrak{a}^+} = \mathbb{R}^+ \Lambda_1 + \dots + \mathbb{R}^+ \Lambda_\ell$ and recall that

$$\begin{cases} \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle \leq 0 & \forall 1 \leq j \neq k \leq \ell, \\ \langle \Lambda_j, \Lambda_k \rangle \geq 0 & \forall 1 \leq j, k \leq \ell. \end{cases} \quad (3.6)$$

(see [Hel78, Chap.VII, Lemmas 2.18 and 2.25], see also [Kor93, p.590]). Let \mathfrak{B} be the convex hull of $W \cdot \Lambda_1 \sqcup \dots \sqcup W \cdot \Lambda_\ell$, and let \mathfrak{S} be its polyhedral boundary. Notice that $\mathfrak{B} \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$ is the ℓ -simplex with vertices $0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell$, and $\mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$ is the $(\ell - 1)$ -simplex with vertices $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell$. The following tiling is obtained by regrouping the barycentric subdivisions of the simplices $\mathfrak{S} \cap w \cdot \mathfrak{a}^+$:

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{w \in W} \bigcup_{1 \leq j \leq \ell} w \cdot \mathfrak{S}_j \quad (3.7)$$

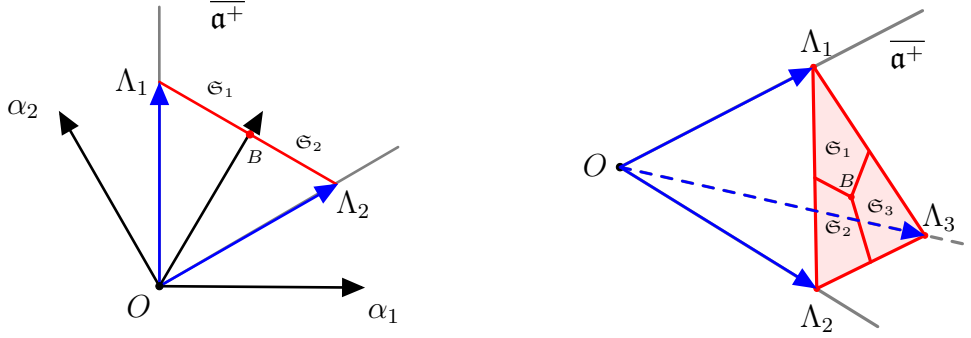
where

$$\mathfrak{S}_j = \{\lambda \in \mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{a}^+} \mid \langle \alpha_j, \lambda \rangle = \max_{1 \leq k \leq \ell} \langle \alpha_k, \lambda \rangle\}.$$

Remark 3.2.1. \mathfrak{S}_j is the convex hull of the points

$$\frac{\Lambda_{k_1} + \dots + \Lambda_{k_r}}{r}$$

where $\{\Lambda_{k_1}, \dots, \Lambda_{k_r}\}$ runs through all subsets of $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell\}$ containing Λ_j .


 FIGURE 3.1 – Examples of barycentric subdivisions in A_2 and in A_3 .

Lemma 3.2.2. *Let $w \in W$ and $1 \leq j \leq l$. Then*

(i) *a root $\alpha \in \Sigma$ is orthogonal to some vectors in the tile $w.\mathfrak{S}_j$ if and only if α is orthogonal to its vertex $w.\lambda_j$.*

(ii) *$\langle w.\Lambda_j, \lambda \rangle \geq \frac{1}{\ell} |\Lambda_j|^2$ for every $\lambda \in w.\mathfrak{S}_j$.*

Proof. (i) Let us show that $\langle \alpha, w.\Lambda_j \rangle = 0$ if there exists $\lambda \in w.\mathfrak{S}_j$ such that $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$. By symmetry, we may assume that $w = \text{id}$ and that α is a positive root. On the one hand, since α is spanned by the positive simple roots $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, we have

$$\alpha = \sum_{1 \leq k \leq \ell} \langle \alpha, \Lambda_k \rangle \alpha_k$$

with $\langle \alpha, \Lambda_k \rangle \in \mathbb{N}$. On the other hand, since $\langle \alpha_1, \lambda \rangle, \dots, \langle \alpha_\ell, \lambda \rangle$ are the barycentric coordinates of $\lambda \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{a}^+$, we have

$$\lambda = \sum_{1 \leq k \leq \ell} \langle \alpha_k, \lambda \rangle \Lambda_k \tag{3.8}$$

which is a convex combination. In particular, $\langle \alpha_j, \lambda \rangle > 0$ for all $\lambda \in \mathfrak{S}_j$. Hence the inner product

$$\langle \alpha, \lambda \rangle = \sum_{1 \leq k \leq \ell} \underbrace{\langle \alpha, \Lambda_k \rangle}_{\geq 0} \underbrace{\langle \alpha_k, \lambda \rangle}_{\geq 0} \underbrace{\langle \alpha_k, \Lambda_k \rangle}_{=1}$$

cannot vanish unless $\langle \alpha, \Lambda_j \rangle = 0$.

(ii) By symmetry, we may assume again that $w = \text{id}$. By taking the inner product of Λ_j with (3.8), we obtain

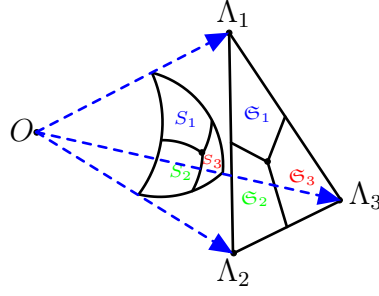
$$\langle \Lambda_j, \lambda \rangle = \sum_{1 \leq k \leq \ell} \langle \Lambda_j, \Lambda_k \rangle \langle \alpha_k, \lambda \rangle = |\Lambda_j|^2 \underbrace{\langle \alpha_j, \lambda \rangle}_{\geq \frac{1}{\ell}} + \sum_{k \neq j} \underbrace{\langle \Lambda_j, \Lambda_k \rangle}_{\geq 0} \underbrace{\langle \alpha_k, \lambda \rangle}_{\geq 0} \geq \frac{1}{\ell} |\Lambda_j|^2,$$

according to the property (3.6), and the fact that $\langle \alpha_j, \lambda \rangle$ is the largest barycentric coordinates for $\lambda \in \mathfrak{S}_j$. \square

Now, consider the tiling of the unit sphere obtained by projecting (3.7) :

$$S(\mathfrak{a}) = \bigcup_{w \in W} \bigcup_{1 \leq j \leq \ell} w.S_j$$

where S_j are the projections of the barycentric subdivisions \mathfrak{S}_j on the unit sphere.


 FIGURE 3.2 – Example of the projection in A_3

We establish in the following a smooth version of the partition of unity

$$\sum_{w \in W} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \mathbf{1}_{w.S_j} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \right) = 1 \quad \text{a.e.}$$

Let $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be a smooth cut-off function such that $\chi(r) = 1$ when $r \geq 0$ and $\chi(r) = 0$ when $r \leq -c_1$, where $c_1 > 0$ will be specified in [Remark 3.2.5](#). For every $w \in W$ and $1 \leq j \leq \ell$, we define

$$\tilde{\chi}_{w.S_j}(\lambda) = \prod_{1 \leq k \leq \ell, k \neq j} \chi \left(\frac{\langle w.\alpha_k, \lambda \rangle}{|\lambda|} \right) \chi \left(\frac{\langle w.\alpha_j, \lambda \rangle - \langle w.\alpha_k, \lambda \rangle}{|\lambda|} \right) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a} \setminus \{0\},$$

and

$$\tilde{\chi} = \sum_{w \in W} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \tilde{\chi}_{w.S_j},$$

which satisfy following properties.

Proposition 3.2.3. *Let $w \in W$ and $1 \leq j \leq \ell$. For all $\lambda \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$, we have*

- (i) $\tilde{\chi}_{w.S_j}(w.\lambda) = \tilde{\chi}_{S_j}(\lambda)$ and $\tilde{\chi}$ is W -invariant.
- (ii) $\tilde{\chi}_{w.S_j} = 1$ on $w.S_j$, and then $\tilde{\chi} \geq 1$ on $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$.
- (iii) $\tilde{\chi}_{w.S_j}$ and $\tilde{\chi}$ are homogeneous symbols of order 0.

Proof. (i) follows from immediately from their definitions. In order to prove (ii), we may assume that $w = \text{id}$ by symmetry. For all $\lambda \in S_j$, we have

$$\langle \alpha_k, \lambda \rangle \geq 0 \quad \text{and} \quad \langle \alpha_j, \lambda \rangle \geq \langle \alpha_k, \lambda \rangle$$

for every $1 \leq k \leq \ell$ with $k \neq j$, hence $\tilde{\chi}_{S_j}(\lambda) = 1$. We deduce straightforwardly that $\tilde{\chi} \geq 1$ on $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$.

(iii) is obvious, since $\chi \left(\frac{\langle w.\alpha_k, \lambda \rangle}{|\lambda|} \right)$ and $\chi \left(\frac{\langle w.\alpha_j, \lambda \rangle - \langle w.\alpha_k, \lambda \rangle}{|\lambda|} \right)$ are homogeneous symbols of order 0 for all $\lambda \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ and $1 \leq k \leq \ell$. □

For every $w \in W$ and $1 \leq j \leq \ell$, we set

$$\chi_{w.S_j} = \frac{\tilde{\chi}_{w.S_j}}{\tilde{\chi}}$$

on $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$. Above properties yield that $\chi_{w.S_j}(w.\lambda) = \chi_{S_j}(\lambda)$ and $\chi_{w.S_j}$ is a homogeneous symbol of order 0. In particular, we have

$$\sum_{w \in W} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \chi_{w.S_j} = 1 \quad \text{on} \quad \mathfrak{a} \setminus \{0\}. \quad (3.9)$$

In addition, the vectors in the support of $\chi_{w.S_j}$ satisfy further properties, which require some preliminaries.

Lemma 3.2.4. *There exists $c_2 > 0$ such that, if $\lambda \in \mathfrak{a}$ satisfies*

$$-c_2|\lambda| \leq \langle \alpha_k, \lambda \rangle \leq \langle \alpha_j, \lambda \rangle + c_2|\lambda| \quad \forall k \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{j\},$$

for some $1 \leq j \leq \ell$, then $\langle \alpha_j, \lambda \rangle \geq c_2|\lambda|$.

Proof. By homogeneity, we may reduce to $|\lambda| = 1$. Since all norms are equivalent on \mathfrak{a} , there exists $c_3 > 0$ such that

$$\sum_{1 \leq j \leq \ell} |\langle \alpha_k, \lambda \rangle| \geq c_3 \quad \forall \lambda \in S(\mathfrak{a}). \quad (3.10)$$

Set $c_2 = \frac{c_3}{2\ell}$. On the other hand, if

$$-c_2 \leq \langle \alpha_k, \lambda \rangle \leq 2c_2 \quad \forall k \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{j\},$$

then $\langle \alpha_j, \lambda \rangle \geq 2c_2$. Otherwise,

$$\sum_{1 \leq j \leq \ell} |\langle \alpha_k, \lambda \rangle| = \underbrace{|\langle \alpha_j, \lambda \rangle|}_{< 2c_2} + \sum_{k \neq j} \underbrace{|\langle \alpha_k, \lambda \rangle|}_{\leq 2c_2} < 2\ell c_2 = c_3,$$

which contradicts (3.10). On the other hand, if

$$2c_2 \leq \langle \alpha_k, \lambda \rangle \leq \langle \alpha_j, \lambda \rangle + c_2$$

for some $k \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{j\}$, then $\langle \alpha_j, \lambda \rangle \geq c_2$ is obvious. \square

Remark 3.2.5. *We clarify in this remark all the constants appeared in this subsection. Denote by L_1 the highest root length and by L_2 the sum of lengths of all the generators*

$$L_1 = \max_{\alpha \in \Sigma^+} \sum_{1 \leq k \leq \ell} \langle \alpha, \Lambda_k \rangle \quad \text{and} \quad L_2 = \sum_{1 \leq k \leq \ell} |\Lambda_k|.$$

In addition, we denote by M_1 and M_2 the shortest and the longest generators

$$M_1 = \min_{1 \leq k \leq \ell} |\Lambda_k| \quad \text{and} \quad M_2 = \max_{1 \leq k \leq \ell} |\Lambda_k|.$$

Then we choose $c_1 > 0$ such that $c_1 < c_2 \min\{\frac{1}{L_1}, \frac{M_1^2}{M_2 L_2}\}$, where $c_2 = \frac{c_3}{2\ell}$ with c_3 defined in (3.10). Let $c_4 = c_2 - L_1 c_1$ and $c_5 = M_1^2 c_2 - M_2 L_2 c_1$. Notice that $L_1 \in \mathbb{N}^$, $c_1 < c_2$, $c_4 > 0$ and $c_5 > 0$. All these constants depend only on the geometric structure of the roots system corresponding to \mathbb{X} .*

The following result is an analog of Lemma 3.2.2 for the wider regions $\text{supp } \chi_{w.S_j}$.

Proposition 3.2.6. *Let $w \in W$ and $1 \leq j \leq \ell$. Then*

(i) *a root $\alpha \in \Sigma$ satisfies either $\langle \alpha, w.\lambda_j \rangle = 0$ or*

$$|\langle \alpha, \lambda \rangle| \geq c_4|\lambda| \quad \forall \lambda \in \text{supp } \chi_{w.S_j}, \quad (3.11)$$

(ii) *$|\langle w.\Lambda_j, \lambda \rangle| \geq c_5|\lambda|$ for every $\lambda \in \text{supp } \chi_{w.S_j}$.*

Proof. (i) By symmetry, we may assume that $w = \text{id}$ and that α is a positive root. Notice that $\langle \alpha, \Lambda_j \rangle$ is a nonnegative integer, we suppose that $\langle \alpha, \Lambda_j \rangle > 0$ and let us prove (3.11). As

$$-c_1|\lambda| \leq \langle \alpha_k, \lambda \rangle \leq \langle \alpha_j, \lambda \rangle + c_1|\lambda| \quad \forall \lambda \in \text{supp } \chi_{S_j}, \quad \forall k \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{j\},$$

we have indeed

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \lambda \rangle &= \sum_{1 \leq k \leq \ell} \langle \alpha, \Lambda_k \rangle \langle \alpha_k, \lambda \rangle \\ &= \underbrace{\langle \alpha, \Lambda_j \rangle}_{\geq 1} \underbrace{\langle \alpha_j, \lambda \rangle}_{\geq c_2|\lambda|} + \sum_{k \neq j} \underbrace{\langle \alpha, \Lambda_k \rangle}_{\geq -c_1|\lambda|} \underbrace{\langle \alpha_k, \lambda \rangle}_{\geq -c_1|\lambda|} \geq (c_2 - L_1 c_1)|\lambda| = c_4|\lambda|, \end{aligned}$$

according to [Lemma 3.2.4](#) since $c_1 < c_2$.

(ii) By symmetry, we assume again $w = \text{id}$. By taking the inner product of Λ_j with [\(3.8\)](#), we obtain, for every $\lambda \in \text{supp } \chi_{S_j}$,

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_j, \lambda \rangle &= \sum_{1 \leq k \leq \ell} \langle \Lambda_j, \Lambda_k \rangle \langle \alpha_k, \lambda \rangle \\ &= \underbrace{|\Lambda_j|^2}_{\geq M_1^2} \underbrace{\langle \alpha_j, \lambda \rangle}_{\geq c_2 |\lambda|} + \sum_{k \neq j} \underbrace{\langle \Lambda_j, \Lambda_k \rangle}_{\leq |\Lambda_j| |\Lambda_k|} \underbrace{\langle \alpha_k, \lambda \rangle}_{\geq -c_1 |\lambda|} \geq (M_1^2 c_2 - M_2 L_2 c_1) |\lambda| = c_5 |\lambda|. \end{aligned}$$

□

Remark 3.2.7. *The partition of unity [\(3.9\)](#) plays an important role in the kernel analysis carried out in [Sect. 3.3](#). It allows us to overcome a well-known problem in spherical Fourier analysis in higher rank, namely the fact that the Plancherel density is not a symbol in general. This new tool should certainly help solving other problems.*

3.3 Pointwise estimates of the wave kernel

In this section, we derive pointwise estimates for the K -bi-invariant convolution kernel ω_t^σ of the operator $W_t^\sigma = (-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$ on the symmetric space \mathbb{X} :

$$W_t^\sigma f(x) = f * \omega_t^\sigma(x) = \int_G dy \omega_t^\sigma(y^{-1}x) f(y)$$

for suitable exponents $\sigma \in \mathbb{C}$. By using the inverse formula of the spherical Fourier transform, we have

$$\omega_t^\sigma(x) = C_0 \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(x) (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}}$$

Let us point out that the analysis of this oscillatory integral carried out on hyperbolic spaces or on symmetric spaces G/K with G complex (see [\[AnPi14; Zhw20\]](#)) does not hold in general since the Plancherel density $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ is no more a differential symbol. We write

$$\omega_t^\sigma(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{+\infty} ds s^{\sigma-1} \underbrace{C_0 \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(x) e^{-(s-it)\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}}}_{p_{s-it}(x)}.$$

according to the formula

$$r^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} s^\sigma e^{-sr} \quad \forall r > 0.$$

Here p_{s-it} is the K -bi-invariant convolution kernel of the Poisson operator \mathcal{P}_{s-it} . Let us split up $\omega_t^\sigma(x) = \omega_t^{\sigma,0}(x) + \omega_t^{\sigma,\infty}(x)$ with

$$\omega_t^{\sigma,0}(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} p_{s-it}(x) \quad \text{and} \quad \omega_t^{\sigma,\infty}(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_1^{+\infty} ds s^{\sigma-1} p_{s-it}(x).$$

We shall see in [Sect. 3.3.2](#) that the kernel $\omega_t^{\sigma,0}(x)$ has a logarithmic singularity on the sphere $|x| = t$ when $\sigma = \frac{d+1}{2}$. To bypass this problem, we consider the analytic family of operators

$$\widetilde{W}_t^{\sigma,0} = \underbrace{\frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)\Gamma(\sigma)}}_{C_{\sigma,d}} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} \mathcal{P}_{s-it} \tag{3.12}$$

in the vertical strip $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$ and the corresponding kernels

$$\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x) = C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} p_{s-it}(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Notice that the Gamma function $\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)$ allows us to deal with the boundary point $\sigma = \frac{d+1}{2}$, while the exponential function ensures boundedness at infinity in the vertical strip. More precisely, by using the inequality

$$|\Gamma(z)| \geq \Gamma(\operatorname{Re} z) (\cosh(\pi \operatorname{Im} z))^{-\frac{1}{2}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ with } \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}$$

(see for instance [DLMF, Eq. 5.6.7]), we can estimate

$$|C_{\sigma,d}| \lesssim |\sigma| \left| \sigma - \frac{d+1}{2} \right| e^{\pi |\operatorname{Im} \sigma| - (\operatorname{Im} \sigma)^2} \quad (3.13)$$

for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$.

We divide the argument into three parts depending whether $|t|$ and $\frac{|x|}{|t|}$ are small or large. When $|t|$ is large but $\frac{|x|}{|t|}$ is sufficiently small, we estimate $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}$ in [Theorem 3.3.5](#) by combining the method of stationary phase with our barycentric decomposition of Weyl chambers; when $\frac{|x|}{|t|}$ is large, we estimate $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}$ in [Theorem 3.3.9](#) by using the Hadamard parametrix along the lines of [CGM01]; $\omega_t^{\sigma,\infty}(x)$ is easily handled by a standard stationary phase argument, see [Theorem 3.3.12](#).

3.3.1 Estimates of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)$ when $|t|$ is large and $\frac{|x|}{|t|}$ is sufficiently small.

According to the integral expression (3.3) of the spherical functions, we write

$$\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x) = C_{\sigma,d} C_0 \int_K dk e^{\langle \rho, A(kx) \rangle} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} I(s, t, x),$$

where

$$I(s, t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} e^{it\psi_t(\lambda)}$$

is an oscillatory integral with phase

$$\psi_t(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2} + \langle \frac{A(kx)}{t}, \lambda \rangle. \quad (3.14)$$

Let us split up

$$I(s, t, x) = I^-(s, t, x) + I^+(s, t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_0^\rho(\lambda) \cdots + \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_\infty^\rho(\lambda) \cdots$$

by using smooth radial cut-off functions χ_0^ρ and $\chi_\infty^\rho = 1 - \chi_0^\rho$, where $\chi_0^\rho(\lambda)$ equals 1 when $|\lambda| \leq |\rho|$ and vanishes if $|\lambda| \geq 2|\rho|$. Then we have the following estimates for I^- and I_∞^- .

Proposition 3.3.1. *There exists $0 < C_\Sigma \leq \frac{1}{2}$ such that the following estimates hold when $0 < s < 1$, $|t| \geq 1$ and $\frac{|x|}{|t|} \leq C_\Sigma$:*

$$|I^-(s, t, x)| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D-\ell}{2}}, \quad (3.15)$$

and

$$|I^+(s, t, x)| \lesssim |t|^{-N}, \quad (3.16)$$

for every $N \in \mathbb{N}$.

Remark 3.3.2. C_Σ is a small constant depending only on the geometric structure of the root system Σ , which will be specified later in the proof of (3.16). Notice that the upper bounds (3.15) of I^- and (3.16) of I^+ hold uniformly in $s \in (0, 1)$.

Proof of the estimate (3.15). Recall that

$$I^-(s, t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda a_0(s, \lambda) e^{it\psi_t(\lambda)}$$

is an oscillatory integral with amplitude

$$a_0(s, \lambda) = \chi_0^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}}$$

and phase $\psi_t(\lambda)$ which is defined by (3.14). The amplitude $a_0(s, \lambda)$ is compactly supported for $|\lambda| \leq 2|\rho|$, and the phase ψ_t has, in the support of χ_0^ρ , a single nondegenerate critical point λ_0 which is given by

$$(|\lambda_0|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{1}{2}} \lambda_0 = -\frac{A}{t} \quad (3.17)$$

where $A = A(kx)$, and which satisfies

$$|\lambda_0| = |\rho| \frac{|A|}{|t|} \left(1 - \frac{|A|^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq |\rho| \frac{|x|}{t} \left(1 - \frac{|x|^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} < \frac{|\rho|}{\sqrt{3}}, \quad (3.18)$$

as $|A| \leq |x|$ and $\frac{|x|}{t} \leq C_\Sigma < \frac{1}{2}$. We conclude by resuming straightforwardly the computations carried out in the proof of [Zhw20, Theorem 3.1]. For the sake of completeness and for the reader's convenience, we include a detailed study of the oscillatory integral I^- in the next lemma. \square

Lemma 3.3.3. *Let $s \in \mathbb{R}_+$ and $|t| \geq 1$. Consider the oscillatory integral*

$$I^-(s, t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda a_0(s, \lambda) e^{it\psi_t(\lambda)}$$

where the phase is given by

$$\psi_t(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2} + \langle \frac{A}{t}, \lambda \rangle$$

and the amplitude

$$a_0(s, \lambda) = \chi_0^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}}$$

vanishes unless $|\lambda| \leq 2|\rho|$. Then, for all $x \in \mathbb{X}$ such that $\frac{|x|}{|t|} \leq C_\Sigma$,

$$|I^-(s, t, x)| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D-\ell}{2}} e^{-\frac{|\rho|}{2}s}.$$

Remark 3.3.4. *The proof of this lemma is similar to the proof of [Zhw20, Theorem 3.1.(ii)], except that our amplitude involves the general Plancherel density and in addition a Gaussian factor depending on s .*

Proof. By symmetry, we may assume that $t \geq 1$. Recall that the critical point λ_0 of the phase ψ is given by

$$(|\lambda_0|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{1}{2}} \lambda_0 = -\frac{A}{t} \quad (3.19)$$

and satisfies

$$|\lambda_0| = |\rho| \frac{|A|}{|t|} \left(1 - \frac{|A|^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq |\rho| \frac{|x|}{t} \left(1 - \frac{|x|^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} < \frac{|\rho|}{\sqrt{3}}, \quad (3.20)$$

as $|A| \leq |x|$ and $\frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{2}$. Denote by

$$B(\lambda_0, \eta) = \{\lambda \in \mathfrak{a} \mid |\lambda - \lambda_0| \leq \eta\}$$

the ball in \mathfrak{a} centered at λ_0 , where the radius η will be specified later. Notice that $|\lambda| < |\rho| + \eta$ for all $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$. Let P_λ be the projection onto the vector spanned by $\frac{\lambda}{|\lambda|}$. Then $|\lambda|^2 P_\lambda = \lambda \otimes \lambda$ and the Hessian matrix of ψ_t is given by

$$\begin{aligned} \text{Hess } \psi_t(\lambda) &= (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{1}{2}} I_\ell - (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{3}{2}} \lambda \otimes \lambda \\ &= (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{3}{2}} \{ |\rho|^2 P_\lambda + (|\lambda|^2 + |\rho|^2)(I_\ell - P_\lambda) \} \\ &= (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{3}{2}} \left(\begin{array}{c|c} |\rho|^2 & 0 \\ \hline 0 & (|\lambda|^2 + |\rho|^2) I_{\ell-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

which is a positive definite symmetric matrix. Hence λ_0 is a nondegenerate critical point. Since $\nabla_{\mathfrak{a}} \psi_t(\lambda_0) = 0$, we write

$$\psi_t(\lambda) - \psi_t(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)^T \underbrace{\left\{ \int_0^1 ds (1-s) \text{Hess } \psi_t(\lambda_0 + s(\lambda - \lambda_0)) \right\}}_{\mathcal{M}(\lambda)} (\lambda - \lambda_0),$$

where $\mathcal{M}(\lambda)$ belongs, for every $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$, to a compact subset of the set of positive definite symmetric matrices. We introduce a new variable $\mu = \mathcal{M}(\lambda)^{\frac{1}{2}}(\lambda - \lambda_0)$, then $|\mu|^2 = \psi_t(\lambda) - \psi_t(\lambda_0)$ and $\mu = 0$ if and only if $\lambda = \lambda_0$. There exist $0 < \tilde{\eta}_1 \leq \tilde{\eta}_2$ such that $\mu \in B(0, \tilde{\eta}_1)$ implies $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$, and $\lambda \in B(\lambda_0, \eta)$ implies $\mu \in B(0, \tilde{\eta}_2)$. Notice that for every $k \in \mathbb{N}$, there exists $C_k > 0$ such that

$$|\nabla_{\mathfrak{a}}^k \mathcal{M}(\lambda)^{\frac{1}{2}}| \leq C_k \quad \forall \lambda \in B(\lambda_0, \eta). \quad (3.21)$$

Denote by $j(\lambda)$ the Jacobian matrix such that $d\mu = \det[j(\lambda)]d\lambda$, then we can choose $\eta > 0$ small enough such that

$$\det[j(\lambda)] > \frac{1}{2} \det[\mathcal{M}(\lambda)^{\frac{1}{2}}] \quad \forall \lambda \in B(\lambda_0, \eta). \quad (3.22)$$

Now, we split up

$$\begin{aligned} I^-(s, t, x) &= I_0^-(s, t, x) + I_\infty^-(s, t, x) \\ &= \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_0^\eta(\lambda) a_0(s, \lambda) e^{it\psi_t(\lambda)} + \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_\infty^\eta(\lambda) a_0(s, \lambda) e^{it\psi_t(\lambda)} \end{aligned}$$

where $\chi_0^\eta : \mathfrak{a} \rightarrow [0, 1]$ is a smooth cut-off function which vanishes unless $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\eta}{2}$, $\chi_0^\eta(\lambda) = 1$ if $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\eta}{4}$, and $\chi_\infty^\eta = 1 - \chi_0^\eta$.

Estimate of I_0^- . We estimate I_0^- by using the stationary phase analysis described in [Ste93, Chap.VIII 2.3]. Notice that $\text{supp } \chi_0^\eta \subset B(\lambda_0, \eta)$. By substituting $\psi_t(\lambda) = |\mu|^2 + \psi_t(\lambda_0)$, we get

$$I_0^-(s, t, x) = e^{it\psi_t(\lambda_0)} \int_{\mathfrak{a}} d\mu \tilde{a}(s, \lambda(\mu)) e^{it|\mu|^2}$$

where the amplitude

$$\tilde{a}(s, \lambda(\mu)) = \chi_0^\eta(\lambda(\mu)) \chi_0^\rho(\lambda(\mu)) |\mathbf{c}(\lambda(\mu))|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda(\mu)|^2 + |\rho|^2}} \det[j(\lambda(\mu))]^{-1} \quad (3.23)$$

is smooth and compactly supported in $B(0, \tilde{\eta}_2)$. We deduce, from (3.21) and (3.22) that $\tilde{a}(s, \lambda(\mu))$ is bounded, together with all its derivatives. Let $\chi_{\tilde{\eta}_2} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathfrak{a})$ be a bump function such that $\chi_{\tilde{\eta}_2} = 1$ on $B(0, \tilde{\eta}_2)$. Then

$$I_0^-(s, t, x) = e^{it\psi_t(\lambda_0)} \int_{\mathfrak{a}} d\mu \chi_{\tilde{\eta}_2}(\mu) e^{it|\mu|^2} e^{-|\mu|^2} \{ e^{|\mu|^2} \tilde{a}(s, \lambda(\mu)) \}.$$

Let $M = [\frac{D}{2}] + 1$ be the smallest integer $> \frac{D}{2}$, the coefficients of the Taylor expansion

$$e^{|\mu|^2} \tilde{a}(s, \lambda(\mu)) = \sum_{|k| \leq 2M} c_k \mu^k + R_{2M}(\mu)$$

at the origin satisfy

$$|c_k| \lesssim |\mathbf{c}(\lambda_0)|^{-2} (1+s)^k e^{-s\sqrt{|\lambda_0|^2 + |\rho|^2}} \lesssim \left(\frac{|x|}{t}\right)^{D-\ell} (1+s)^k e^{-|\rho|s}, \quad (3.24)$$

according to (3.20), and the remainder satisfies

$$|\nabla_{\mathbf{a}}^n R_{2M}(\mu)| \lesssim |\mu|^{2M+1-n} (1+s)^{2M+1+n} e^{-|\rho|s} \quad \forall 0 \leq n \leq 2M+1. \quad (3.25)$$

By substituting this expansion in the above integral, $I_0^-(s, t, x)$ is the sum of following three terms :

$$I_1 = \sum_{|k| \leq 2M} c_k \int_{\mathbf{a}} d\mu \mu^k e^{it|\mu|^2} e^{-|\mu|^2}$$

$$I_2 = \int_{\mathbf{a}} d\mu \chi_{\tilde{\eta}_2}(\mu) R_{2M}(\mu) e^{it|\mu|^2} e^{-|\mu|^2},$$

and

$$I_3 = \sum_{|k| \leq 2M} c_k \int_{\mathbf{a}} d\mu \{\chi_{\tilde{\eta}_2}(\mu) - 1\} \mu^k e^{it|\mu|^2} e^{-|\mu|^2}.$$

To estimate I_1 , we write

$$I_1 = \sum_{|k| \leq 2M} c_k \prod_{j=1}^{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_j e^{it\mu_j^2} e^{-\mu_j^2} \mu_j^{k_j}$$

where

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_j e^{-(1-it)\mu_j^2} \mu_j^{k_j} = 0$$

if k_j is odd, while

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_j e^{-(1-it)\mu_j^2} \mu_j^{k_j} = 2(1-it)^{-\frac{k_j+1}{2}} \int_0^{+\infty} dz_j e^{-z_j^2} z_j^{k_j}$$

by a change of contour if k_j is even. We deduce from (3.24)

$$|I_1| \lesssim t^{-\frac{\ell}{2}} \left(\frac{|x|}{t}\right)^{D-\ell} (1+s)^{2M} e^{-|\rho|s} \lesssim t^{-\frac{D}{2}} |x|^{-\frac{D-\ell}{2}} e^{-\frac{|\rho|}{2}s}$$

since $\frac{|x|}{t} \leq C_{\Sigma}$. Next, we perform M integrations by parts based on

$$e^{it|\mu|^2} = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\mu_j}{|\mu|^2} \frac{\partial}{\partial \mu_j} e^{it|\mu|^2} \quad (3.26)$$

and obtain

$$|I_2| \lesssim t^{-M} (1+s)^{3M+1} e^{-|\rho|s} \lesssim t^{-M} e^{-\frac{|\rho|}{2}s}$$

according to (3.25). Finally, as $\mu \mapsto \mu^k e^{-|\mu|^2} (\tilde{\chi}(\mu) - 1)$ is exponentially decreasing and vanishes near the origin, we perform $N \geq \frac{D}{2}$ integrations by parts based on (3.26) again and obtain

$$|I_3| \lesssim t^{-N} (1+s)^{2M} e^{-\frac{|\rho|}{2}s}.$$

By summing up the estimates of I_1 , I_2 and I_3 , we deduce that

$$|I_0^-(s, t, x)| \lesssim t^{-\frac{D}{2}} (1+|x|)^{\frac{D-\ell}{2}} (1+s)^{2d+3} e^{-|\rho|s} \lesssim t^{-\frac{D}{2}} (1+|x|)^{\frac{D-\ell}{2}} e^{-\frac{|\rho|}{2}s}. \quad (3.27)$$

Estimate of I_∞^- . Since the phase ψ_t has a unique critical point λ_0 which is defined by (3.19) and satisfies (3.20), then for all $\lambda \in \text{supp } \chi_\infty^\eta$, we have $\nabla_{\mathbf{a}} \psi_t(\lambda) \neq 0$. In order to get large time decay, we estimate

$$I_\infty^-(s, t, x) = \int_{\mathbf{a}} d\lambda \chi_\infty^\eta(\lambda) a_0(s, \lambda) e^{it\psi_t(\lambda)}$$

by using several integrations by parts based on

$$e^{it\psi_t(\lambda)} = \frac{1}{it} \tilde{\psi}_0(\lambda)^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} + \frac{A_j}{t} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} e^{it\psi_t(\lambda)},$$

where

$$\tilde{\psi}_0(\lambda) = \left| \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} + \frac{A}{t} \right|^2$$

is a smooth function, which is bounded from below on the compact set $(\text{supp } \chi_\infty^\eta) \cap (\text{supp } \chi_0^\rho)$, uniformly in $\frac{A}{t}$. After performing N such integrations by parts, $I_\infty^-(s, t, x)$ becomes

$$\text{const. } (it)^{-N} \int_{\mathbf{a}} d\lambda e^{it\psi_t(\lambda)} \left\{ - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \circ [\tilde{\psi}_0(\lambda)^{-1} \left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} + \frac{A_j}{t} \right)] \right\}^N \left\{ \chi_\infty^\eta(\lambda) a_0(s, \lambda) \right\}$$

where the last integral is bounded from above by $(1+s)^N e^{-|\rho|s} \lesssim e^{-\frac{|\rho|}{2}s}$. Hence

$$|I_\infty^-(s, t, x)| \lesssim t^{-N} e^{-\frac{|\rho|}{2}s} \quad (3.28)$$

for every $N \in \mathbb{N}$. By combining (3.27) and (3.28), we conclude that

$$|I^-(s, t, x)| \lesssim t^{-\frac{D}{2}} (1+|x|)^{\frac{D-\ell}{2}} e^{-\frac{|\rho|}{2}s}.$$

□

Let us turn to the oscillatory integral

$$I^+(s, t, x) = \int_{\mathbf{a}} d\lambda \chi_\infty^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} e^{it\psi_t(\lambda)},$$

which vanishes unless $|\lambda| > |\rho|$. According to (3.18), ψ_t has no critical point in the support of χ_∞^ρ . In rank one or in higher rank with G complex, one can handle this integral by performing several integrations by parts. This approach fails in general since the Plancherel density $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ is not a differential symbol. To get around this problem, we split up the Weyl chamber according to the barycentric decomposition carried out in Sect. 3.2.3, and perform integrations by parts based along a well chosen directional derivative in each component.

Proof of the estimate (3.16). According to the partition of unity (3.9), we split up

$$I^+(s, t, x) = \sum_{w \in W} \sum_{1 \leq j \leq \ell} I_{w.S_j}(it, x)$$

with $\tau = s - it$, and we estimate

$$I_{w.S_j}(it, x) = \int_{\mathbf{a}} d\lambda \chi_{w.S_j}(\lambda) \chi_\infty^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-\tau\psi_{i\tau}(\lambda)} \quad (3.29)$$

by performing integrations by parts based on

$$e^{-\tau\psi_{i\tau}(\lambda)} = -\frac{1}{\tau} \frac{1}{\partial_{w.\Lambda_j} \psi_{i\tau}(\lambda)} \partial_{w.\Lambda_j} e^{-\tau\psi_{i\tau}(\lambda)}. \quad (3.30)$$

Notice that

$$\partial_{w.\Lambda_j} \psi_{i\tau}(\lambda) = \langle w.\Lambda_j, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} - i \frac{A(kx)}{\tau} \rangle$$

is a symbol of order 0, which satisfies in addition

$$\begin{aligned} |\partial_{w.\Lambda_j} \psi_{i\tau}(\lambda)| &\geq \frac{|\langle w.\Lambda_j, \lambda \rangle|}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} - \left| \langle w.\Lambda_j, \frac{A(kx)}{\tau} \rangle \right| \\ &\geq c_5 \frac{|\lambda|}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} - |\Lambda_j| \frac{|A(kx)|}{|\tau|} \geq \frac{c_5}{\sqrt{2}} - M_2 \frac{|x|}{|t|} \end{aligned}$$

on $(\text{supp } \chi_{w.S_j}) \cap (\text{supp } \chi_\infty^\rho)$ according to Proposition (3.2.6), where the constants c_5 and M_2 are specified in Remark 3.2.5. By choosing $C_\Sigma = \min\{\frac{c_5}{2M_2}, \frac{1}{2}\}$, we obtain

$$|\partial_{w.\Lambda_j} \psi_{i\tau}(\lambda)| \geq \frac{\sqrt{2}-1}{2} c_5 > 0.$$

Let us return to (3.29), which becomes

$$\begin{aligned} I_{w.S_j}(i\tau, x) &= \tau^{-N} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda e^{-\tau \psi_{i\tau}(\lambda)} \\ &\quad \times \left\{ \partial_{w.\Lambda_j} \circ \frac{1}{\partial_{w.\Lambda_j} \psi_{i\tau}(\lambda)} \right\}^N \left\{ \chi_{w.S_j}(\lambda) \chi_\infty^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \right\}, \end{aligned}$$

after N integrations by parts based on (3.30). If some derivatives hit $\chi_\infty^\rho(\lambda)$, the above integral is reduced to the spherical shell $|\lambda| \asymp |\rho|$ and thus converges. Assume that no derivative is applied to $\chi_\infty^\rho(\lambda)$ and that

- N_1 derivatives are applied to the factors $\frac{1}{\partial_{w.\Lambda_j} \psi_{i\tau}(\lambda)}$,
- N_2 derivatives are applied to $\chi_{w.S_j}(\lambda)$,
- N_3 derivatives are applied to $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$,

with $N = N_1 + N_2 + N_3$. The contribution of the first item is $O(|\lambda|^{-N_1})$, as $\partial_{w.\Lambda_j} \psi_{i\tau}(\lambda)$ is a symbol of order 0, which stays away from 0. Similarly, the contribution of the second item is $O(|\lambda|^{-N_2})$, as $\chi_{w.S_j}(\lambda)$ is a symbol of order 0 according to Proposition 3.2.3. As far as the third item is concerned, the derivatives $(\partial_{w.\Lambda_j})^{N_3}$ are applied to the various factors in (3.4). According to Proposition 3.2.6, for every λ in the support of $\chi_{w.S_j}$, any root $\alpha \in \Sigma$ satisfies either $\langle \alpha, w.\Lambda_j \rangle = 0$ or $|\langle \alpha, \lambda \rangle| \gtrsim |\lambda|$. On the one hand, if $\langle \alpha, w.\Lambda_j \rangle = 0$, all derivatives

$$(\partial_{w.\Lambda_j})^{N_\alpha} |\mathbf{c}_\alpha(\langle \alpha, \lambda \rangle)|^{-2} \quad \forall N_\alpha \in \mathbb{N}^*$$

vanish. On the other hand, if $\langle \alpha, w.\Lambda_j \rangle \neq 0$, we use the fact that $|\mathbf{c}_\alpha|^{-2}$ is a symbol on \mathbb{R} of order $m_\alpha + m_{2\alpha}$, together with (3.11), in order to estimate

$$|(\partial_{w.\Lambda_j})^{N_\alpha} |\mathbf{c}_\alpha(\langle \alpha, \lambda \rangle)|^{-2}| \lesssim |\langle \alpha, \lambda \rangle|^{m_\alpha + m_{2\alpha} - N_\alpha} \asymp |\lambda|^{m_\alpha + m_{2\alpha} - N_\alpha} \quad \forall N_\alpha \in \mathbb{N}^*$$

for $\lambda \in (\text{supp } \chi_{w.S_j}) \cap (\text{supp } \chi_\infty^\rho)$. Hence

$$(\partial_{w.\Lambda_j})^{N_3} |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} = O(|\lambda|^{d-\ell-N_3}) \quad \forall \lambda \in (\text{supp } \chi_{w.S_j}) \cap (\text{supp } \chi_\infty^\rho).$$

In conclusion,

$$|I_{w.S_j}(i\tau, x)| \lesssim |\tau|^{-N} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\lambda|^{d-\ell-N_1-N_2-N_3} \lesssim |t|^{-N}$$

provided that $N > d$, and consequently

$$I^+(s, t, x) = O(|t|^{-N}).$$

□

We deduce from (3.15) and (3.16) that, for all $0 < s < 1$, $|t| \geq 1$ and $\frac{|x|}{|t|} \leq C_\Sigma$,

$$|I(s, t, x)| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D-\ell}{2}} \quad (3.31)$$

uniformly in s . Notice that

$$\frac{\partial}{\partial s} I(s, t, x) = - \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} e^{it\psi_t(\lambda)}$$

has the same phase as $I(s, t, x)$. Hence the estimate (3.31) holds for $\frac{\partial}{\partial s} I(s, t, x)$ by similar computations. Since

$$\int_0^1 ds s^{\sigma-1} I(s, t, x) = \left[\frac{1}{\sigma} s^\sigma I(s, t, x) \right]_0^1 - \frac{1}{\sigma} \int_0^1 ds s^\sigma \frac{\partial}{\partial s} I(s, t, x),$$

we deduce that

$$\left| C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} I(s, t, x) \right| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D-\ell}{2}}$$

according to (3.13). Then we obtain the following kernel estimate of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}$.

Theorem 3.3.5. *There exists $0 < C_\Sigma \leq \frac{1}{2}$ such that the following estimate holds, when $|t| \geq 1$ and $\frac{|x|}{|t|} \leq C_\Sigma$, uniformly in the vertical strip $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$:*

$$|\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D-\ell}{2}} \varphi_0(x). \quad (3.32)$$

3.3.2 Estimates of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)$ in the remaining range

Recall that $\tau = s - it$ with $t \in \mathbb{R}^*$ and $s \in (0, 1)$ throughout this subsection. We are looking for pointwise estimates of

$$\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x) = C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} C_0 \underbrace{\int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(x)}_{p_\tau(x)} \overbrace{e^{-\tau\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}}}^{\tilde{p}_\tau(\lambda)} \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

where $p_\tau(x)$ is the Poisson kernel and $\tilde{p}_\tau(\lambda)$ denotes its spherical Fourier transform. This subsection focuses on pointwise estimates of p_τ along the lines of [CGM01, pp.1054-1063].

Remark 3.3.6. *Notice that the Gaussian factor ensures the convergence of the integral defining p_τ , but yields a large negative power s^{-d} . Then $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}$ converges under the strong smoothness assumption $\operatorname{Re} \sigma \geq d$. We will sharpen it to $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. Notice that the stationary phase method carried out in the previous subsection fails since the critical point can be very large when $\frac{|x|}{|t|}$ is not bounded from above.*

As in [CGM01], let us denote by $p_\tau^{\mathbb{R}}(v) = \frac{\tau}{\pi(\tau^2 + v^2)}$ the Poisson kernel on \mathbb{R} . We may write

$$\tilde{p}_\tau(\lambda) = e^{-\tau\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}} = \int_{\mathbb{R}} dv p_\tau^{\mathbb{R}}(v) \cos(v\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}.$$

Consider a smooth even cut-off function $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, which is supported in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, and equals 1 on $[-1, 1]$. Denote by $\chi_T = \chi(\frac{\cdot}{\sqrt{2}T})$ with $T = \sqrt{2}$ (uniformly in t) when $|t| \leq 1$ or $T = \sqrt{2}|t|$ when $|t| \geq 1$. Then χ_T is supported in $[-2\sqrt{2}T, 2\sqrt{2}T] \subset (-3T, 3T)$. We denote by a_τ and b_τ the K -bi-invariant kernels of operators

$$A_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \chi_T(v) p_\tau^{\mathbb{R}}(v) \cos(v\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}})$$

and

$$B_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} dv \{1 - \chi_T(v)\} p_\tau^\mathbb{R}(v) \cos(v\sqrt{-\Delta_\mathbb{X}}).$$

Then $p_\tau = a_\tau + b_\tau$ and a_τ is supported in a ball of radius $3T$ in \mathbb{X} by finite propagation speed. b_τ is easily estimated by straightforward computations, see [Proposition 3.3.8](#). In order to analyze a_τ , we will expand $\cos(v\sqrt{-\Delta_\mathbb{X}})$ by using Hadamard parametrix.

Let $\{R_+^z \mid z \in \mathbb{C}\}$ be the analytic family of Riesz distributions on \mathbb{R} defined by

$$R_+^z(r) = \begin{cases} \Gamma(z)^{-1} r^{z-1} & \text{if } r > 0, \\ 0 & \text{if } r \leq 0, \end{cases}$$

for $\operatorname{Re} z > 0$. The K -bi-invariant convolution kernel Φ_v of the operator $\cos(v\sqrt{-\Delta_\mathbb{X}})$ has the asymptotic expansion

$$\Phi_v(\exp H) = J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{[d/2]} 4^{-k} |v| U_k(H) R_+^{k-\frac{d-1}{2}}(v^2 - |H|^2) + E_\Phi(v, H) \quad (3.33)$$

where

$$J(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left(\frac{\sinh \langle \alpha, H \rangle}{\langle \alpha, H \rangle} \right)^{m_\alpha}$$

denotes the Jacobian of the exponential map from \mathfrak{p} equipped with Lebesgue measure to \mathbb{X} equipped with Riemannian measure. Moreover, the coefficients satisfy

$$\nabla_{\mathfrak{p}}^n U_k = O(1) \quad (3.34)$$

for every $k, n \in \mathbb{N}$, and the remainder is estimated as

$$|E_\Phi(v, H)| \lesssim (1 + v)^{3(\frac{d}{2}+1)} e^{-\langle \rho, H \rangle}. \quad (3.35)$$

The Hadamard parametrix has been described and applied in various settings, see for instance [\[Bér77; Hor94; CGM01\]](#). For the reader's convenience, we give in [Appendix A](#) some details about this construction in the particular case of noncompact symmetric spaces. By resuming the proof of Lemma 3.3 in [\[CGM01\]](#) (see [Appendix B](#) for details), we deduce the following expansion of the K -bi-invariant convolution kernel a_τ of the operator A_τ :

$$a_\tau(\exp H) = \frac{\tau}{\pi} J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{[d/2]} 4^{-k} U_k(H) \Gamma\left(\frac{d+1}{2} - k\right) (|H|^2 + \tau^2)^{k-\frac{d+1}{2}} + E(\tau, H) \quad (3.36)$$

where

$$|E(\tau, H)| \lesssim |T|^{3(\frac{d}{2}+1)} (\log T - \log s) e^{-\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}. \quad (3.37)$$

Remark 3.3.7. *As a consequence, we may deduce that*

$$|a_\tau(\exp H)| \lesssim s^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\langle \rho, H \rangle} \begin{cases} |t|^{-\frac{d-1}{2}} & \text{if } |t| \text{ is small,} \\ |t|^{3(\frac{d}{2}+1)} \log |t| & \text{if } |t| \text{ is large,} \end{cases}$$

for all $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$. However, we cannot apply straightforwardly such estimates to study the kernel ω_t^σ , since it kills the imaginary part of σ and yields a logarithmic singularity on the sphere $|x| = t$ when $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$.

The following proposition concerning the estimate of b_τ will be proved by straightforward computations.

Proposition 3.3.8. *Let $N > d$ be an even integer. Then*

$$|b_\tau(x)| \lesssim (1 + |t|)^{-N} \varphi_0(x) \quad (3.38)$$

for every $x \in \mathbb{X}$ and for every $\tau = s - it$ with $s \in (0, 1]$ and $t \in \mathbb{R}^*$.

Proof. Let us study

$$B_\tau(\lambda) = \frac{2\tau}{\pi} \int_0^{+\infty} dv \{1 - \chi_T(v)\} \frac{1}{\tau^2 + v^2} \cos(v\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}),$$

which vanishes unless $v > 2T$. By performing N integrations by parts based on

$$\cos(v\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}) = -\frac{1}{|\lambda|^2 + |\rho|^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \cos(v\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}),$$

we obtain

$$B_\tau(\lambda) = \frac{2\tau}{\pi} (-1)^{-\frac{N}{2}} (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} dv \cos(v\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2}) \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^N \left(\frac{1 - \chi_T(v)}{\tau^2 + v^2}\right).$$

Since $v > 2T$, we have $|\tau^2 + v^2| \gtrsim v^2$ uniformly in $\tau = s - it$. Hence

$$|B_\tau(\lambda)| \lesssim |\tau| (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{N}{2}} \int_{2T}^{+\infty} dv v^{-2-N} \lesssim |T|^{-N} (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{N}{2}}.$$

By the inverse formula of the spherical Fourier transform, we deduce

$$\begin{aligned} |b_\tau(x)| &= \left| \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(x) B_\tau(\lambda) \right| \\ &\lesssim |T|^{-N} \varphi_0(x) \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (|\lambda|^2 + |\rho|^2)^{-\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

where the last integral converges provided that $N > d$. \square

According to the asymptotic expansion (3.36) of a_τ and to the estimate (3.38) of b_τ , we establish the pointwise estimates of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}$ in the case where $\frac{|x|}{|t|}$ is bounded from below.

Theorem 3.3.9. *Let $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. The following estimates hold for all $t \in \mathbb{R}^*$ and $x \in \mathbb{X}$.*

(i) *If $0 < |t| < 1$, then*

$$|\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}} (1 + |x^+|)^{\frac{\max\{d,D\}-\ell}{2}} e^{-\langle \rho, x^+ \rangle}.$$

(ii) *If $|t| \geq 1$ and $\frac{|x|}{|t|} > C_\Sigma$, then*

$$|\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim |t|^{-N_1} (1 + |x^+|)^{N_2} e^{-\langle \rho, x^+ \rangle},$$

for every $N_1 \in \mathbb{N}$ and $N_2 \geq N_1 + 2(d+1) + \frac{\max\{d,D\}-\ell}{2}$.

Proof. Recall that we are looking for a pointwise estimate of the kernel

$$\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x) = C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} p_\tau(x),$$

where $\tau = s - it$ with $s \in (0, 1)$ and $t \in \mathbb{R}^*$. According to the Cartan decomposition, for every $x \in \mathbb{X}$, there exist $k_1, k_2 \in K$ and $x^+ \in \mathfrak{a}^+$ such that $x = k_1(\exp x^+)k_2$. Then

$$p_\tau(x) = a_\tau(\exp x^+) + b_\tau(\exp x^+)$$

by the K -bi-invariance. According to the expansion (3.36), we split up

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x) &= I_1(t, x^+) + I_2(t, x^+) + I_3(t, x^+) \\ &= \frac{1}{\pi} J(x^+)^{-1/2} \sum_{k=0}^{[d/2]} 4^{-k} U_k(x^+) \Gamma\left(\frac{d+1}{2} - k\right) I_{1,k}(t, x^+) \\ &\quad + C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} E(\tau, x^+) + C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} b_\tau(\exp x^+)\end{aligned}$$

where

$$I_{1,k}(t, x^+) = C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} \tau(|x^+|^2 + \tau^2)^{k - \frac{d+1}{2}}$$

satisfies

$$|I_{1,k}(t, x^+)| \lesssim 1 + |t|^{-\frac{d-1}{2}}$$

according to next lemma. Hence

$$I_1(t, x^+) \lesssim (\sqrt{|t|} + |t|^{-\frac{d-1}{2}}) J(x^+)^{-1/2} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*. \quad (3.39)$$

The last two terms $I_2(t, x^+)$ and $I_3(t, x^+)$ are easily handled : on the one hand, we have

$$|I_2(t, x^+)| \lesssim \int_0^1 ds s^{\operatorname{Re} \sigma - 1} |E(\tau, x^+)| \lesssim (1 + |t|)^{3(\frac{d}{2}+1)} \log(2 + |t|) e^{-\langle \rho, x^+ \rangle}, \quad (3.40)$$

according to (3.37); on the other hand, (3.38) yields

$$|I_3(t, x^+)| \lesssim \int_0^1 ds s^{\operatorname{Re} \sigma - 1} |b_\tau(\exp x^+)| \lesssim (1 + |t|)^{-N} \varphi_0(\exp x^+) \quad (3.41)$$

for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. By summing up the estimates (3.39), (3.40) and (3.41), we deduce, on the one hand,

$$|\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}} (1 + |x^+|)^{\frac{\max\{d,D\}-\ell}{2}} e^{-\langle \rho, x^+ \rangle}$$

if $|t| < 1$, and on the other hand,

$$|\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim |t|^{3(\frac{d}{2}+1)} \log(2 + |t|) (1 + |x^+|)^{\frac{\max\{d,D\}-\ell}{2}} e^{-\langle \rho, x^+ \rangle}$$

if $|t| \geq 1$. Since $\frac{|x|}{|t|}$ is bounded from below, we obtain finally

$$|\tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim |t|^{-N_1} (1 + |x^+|)^{N_2} e^{-\langle \rho, x^+ \rangle} \quad \forall |t| \geq 1$$

for every $N_1 \in \mathbb{N}$ and $N_2 \geq N_1 + 2(d+1) + \frac{\max\{d,D\}-\ell}{2}$. \square

Remark 3.3.10. Notice that the above method works only in small time, or in large time under the assumption that $\frac{|x|}{|t|}$ is bounded from below. The large polynomial growth in $|x^+|$ appearing in the estimate is not crucial for further computations because of the exponential decay $e^{-\langle \rho, x^+ \rangle}$.

Lemma 3.3.11. For every integer $0 \leq k < \frac{d+1}{2}$, the integral

$$I_{1,k}(t, x^+) = C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^{\sigma-1} \tau(|x^+|^2 + \tau^2)^{k - \frac{d+1}{2}}$$

satisfies

$$|I_{1,k}(t, x^+)| \lesssim 1 + |t|^{k - \frac{d-1}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \in \overline{\mathfrak{a}^+}$$

uniformly in $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$.

Proof. Since $\tau = s - it$, we write $I_{1,k}(t, x^+) = P_1 + P_2$ with

$$P_1 = C_{\sigma,d} \int_0^1 ds s^\sigma (s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti)^{k - \frac{d+1}{2}}$$

and

$$P_2 = C_{\sigma,d}(-it) \int_0^1 ds s^{\sigma-1} (s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti)^{k - \frac{d+1}{2}}.$$

Notice that $|s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti| = \sqrt{s^4 + 2s^2(|x^+|^2 + t^2) + (|x^+|^2 - t^2)^2}$, then

$$|s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti| \geq \begin{cases} s^2 & (3.42) \\ s|t| & (3.43) \\ ||x^+|^2 - t^2| & (3.44) \end{cases}$$

P_1 is easily estimated. By using (3.43), we obtain first

$$|P_1| \lesssim |t|^{k - \frac{d+1}{2}} \int_0^1 ds s^k \leq |t|^{k - \frac{d+1}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

By using in addition (3.42), we obtain next, for $|t| < 1$,

$$|P_1| \lesssim |t|^{k - \frac{d+1}{2}} \int_0^{|t|} ds s^k + \int_{|t|}^1 ds s^{2k - \frac{d+1}{2}} \lesssim 1 + |t|^{2k - \frac{d-1}{2}}$$

We deduce that

$$|P_1| \lesssim \begin{cases} 1 + |t|^{2k - \frac{d-1}{2}} & \text{if } |t| < 1, \\ |t|^{k - \frac{d+1}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3.45)$$

Let us turn to P_2 . Consider first the easy case where $1 \leq k < \frac{d+1}{2}$. By using (3.43) again, we get

$$|P_2| \lesssim |t| \cdot |t|^{k - \frac{d+1}{2}} \int_0^1 ds s^{\operatorname{Re} \sigma - 1 + k - \frac{d+1}{2}} \lesssim |t|^{k - \frac{d-1}{2}} \quad (3.46)$$

for all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. In order to estimate P_2 in the remaining case where $k = 0$, we write

$$P_2 = C_{\sigma,d}(-it) \int_0^1 ds s^{i \operatorname{Im} \sigma - 1} \left(\frac{s}{s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti} \right)^{\frac{d+1}{2}}.$$

By performing an integration by parts, P_2 becomes the sum of P_2^- and P_2^+ where

$$P_2^- = \left[\frac{C_{\sigma,d}}{i \operatorname{Im} \sigma} (-it) s^{i \operatorname{Im} \sigma} \left(\frac{s}{s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti} \right)^{\frac{d+1}{2}} \right]_0^1$$

and

$$P_2^+ = \frac{C_{\sigma,d}}{i \operatorname{Im} \sigma} (it) \int_0^1 ds s^{i \operatorname{Im} \sigma} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{s}{s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti} \right)^{\frac{d+1}{2}} \right\}.$$

By using (3.13) together with (3.42) in small time and (3.43) in large time, we obtain

$$|P_2^-| \lesssim \begin{cases} 1 & \text{if } |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{d-1}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3.47)$$

Since

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{s}{s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti} \right)^{\frac{d+1}{2}} \right\} = \underbrace{\frac{d+1}{2} \left(\frac{s}{s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti} \right)^{\frac{d-1}{2}}}_{O(|t|^{-\frac{d-1}{2}})} \frac{|x^+|^2 - t^2 - s^2}{(s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti)^2},$$

we have

$$|P_2^+| \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}} |t| \underbrace{\int_0^1 ds \frac{||x^+|^2 - t^2 - s^2|}{|s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti|^2}}_Q. \quad (3.48)$$

It remains for us to estimate Q , which is bounded by the sum of

$$Q_1 = |t| \int_0^1 ds \frac{s^2}{|s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti|^2} \quad \text{and} \quad Q_2 = |t| \int_0^1 ds \frac{||x^+|^2 - t^2|}{|s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti|^2}.$$

Q_1 is estimated as P_1 . According to (3.43) and (3.42), we have

$$Q_1 \lesssim \begin{cases} |t| \int_0^1 ds |t|^{-2} = |t|^{-1} \leq 1 & \text{if } |t| \geq 1, \\ |t| \int_0^{|t|} ds |t|^{-2} + |t| \int_{|t|}^1 ds s^{-2} \leq 2 & \text{if } |t| < 1. \end{cases}$$

Let us finally estimate Q_2 . On the one hand, if $||x^+|^2 - t^2| \geq |t|$, by using (3.44), we get

$$|Q_2| \lesssim |t| \int_0^1 ds ||x^+|^2 - t^2|^{-1} \lesssim 1.$$

On the other hand, if $||x^+|^2 - t^2| \leq |t|$, we have $Q_2 = O(1)$ since

$$\left| |t| \int_{0 \leq s \leq \frac{||x^+|^2 - t^2|}{|t|}} ds \frac{||x^+|^2 - t^2|}{|s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti|^2} \right| \lesssim |t| \int_{0 \leq s \leq \frac{||x^+|^2 - t^2|}{|t|}} ds ||x^+|^2 - t^2|^{-1} \leq 1$$

according to (3.44), and

$$\left| |t| \int_{\frac{||x^+|^2 - t^2|}{|t|} \leq s \leq 1} ds \frac{||x^+|^2 - t^2|}{|s^2 + |x^+|^2 - t^2 - 2sti|^2} \right| \lesssim \frac{||x^+|^2 - t^2|}{|t|} \int_{\frac{||x^+|^2 - t^2|}{|t|} \leq s \leq 1} ds s^{-2} \leq 2$$

according to (3.43). Hence $Q = O(1)$ and we deduce from (3.48) that $|P_2^+| \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}}$ for all $t \in \mathbb{R}^*$. By combining with (3.47) and (3.46), we obtain

$$|P_2| \lesssim |t|^{k - \frac{d-1}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Together with (3.45), this concludes the proof. \square

3.3.3 Estimates of $\omega_t^{\sigma, \infty}$

We establish in this last subsection the pointwise estimates of $\omega_t^{\sigma, \infty}$. Recall that

$$\omega_t^{\sigma, \infty}(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_1^{+\infty} ds s^{\sigma-1} p_{s-it}(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}, \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

According to the integral expression (3.3) of the spherical function, we may write

$$\omega_t^{\sigma, \infty}(x) = \frac{C_0}{\Gamma(\sigma)} \int_K dk e^{\langle \rho, A(kx) \rangle} \int_1^{+\infty} ds s^{\sigma-1} I(s, t, x),$$

where, let us recall,

$$I(s, t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}} e^{it\psi_t(\lambda)}.$$

We have considered this oscillatory integral in the case where $s \in (0, 1)$. For $s \geq 1$, the factor $e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}}$ plays an important role. On the one hand, for λ close to the critical point of $\psi_t(\lambda)$, this Gaussian produces an exponential decay in s , which ensures the convergence of the integral over $s \in (1, +\infty)$. For λ away from the critical point, it produces an exponential decay in $|\lambda|$, which ensures the convergence of the integral over $\lambda \in \mathfrak{a}$. Let us elaborate.

Theorem 3.3.12. *The following estimate holds, uniformly in the strip $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$, for all $t \in \mathbb{R}^*$ and $x \in \mathbb{X}$:*

$$|\omega_t^{\sigma, \infty}(x)| \lesssim \varphi_0(x). \quad (3.49)$$

Moreover, if $|t| \geq 1$,

$$|\omega_t^{\sigma, \infty}(x)| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D}{2}} \varphi_0(x). \quad (3.50)$$

Proof. The global estimate (3.49) is obtained by a straightforward computation. On the one hand,

$$\int_{|\lambda| \leq 1} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}} \leq e^{-s|\rho|} \underbrace{\int_{|\lambda| \leq 1} d\lambda |\lambda|^{D-\ell}}_{<+\infty}.$$

On the other hand,

$$\int_{|\lambda| \geq 1} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}} \leq e^{-\frac{s}{2}|\rho|} \underbrace{\int_{|\lambda| \geq 1} d\lambda |\lambda|^{d-\ell} e^{-\frac{s}{2}|\lambda|}}_{<+\infty}.$$

Hence

$$|\omega_t^{\sigma, \infty}(x)| \lesssim \varphi_0(x) \underbrace{\int_1^{+\infty} ds s^{\operatorname{Re} \sigma - 1} e^{-\frac{s}{2}|\rho|}}_{<+\infty}. \quad (3.51)$$

The estimate (3.50) follows from (3.49) if $\frac{|x|}{|t|}$ is bounded from below. Let us prove it if $\frac{|x|}{|t|}$ is bounded from above, let say by $\frac{1}{2}$. We study the oscillatory integral I along the lines of Sect. 3.3.1. Let split up again

$$I(s, t, x) = I^-(s, t, x) + I^+(s, t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_0^\rho(\lambda) \cdots + \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_\infty^\rho(\lambda) \cdots$$

according to cut-off functions χ_0^ρ and $\chi_\infty^\rho = 1 - \chi_0^\rho$, which have been defined in Sect. 3.3.1. Recall that $\chi_0^\rho(\lambda) = 1$ when $|\lambda| \leq |\rho|$ and vanishes if $|\lambda| \geq 2|\rho|$.

On the one hand, I^- is estimated by studying the oscillatory integral

$$I^-(s, t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \underbrace{\chi_0^\rho(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}}}_{a_0(s, \lambda)} e^{it\psi_t(\lambda)}$$

where the amplitude a_0 is compactly supported for $|\lambda| \leq 2|\rho|$, and in this range, the phase ψ_t , defined by (3.14), has a single critical point, which is nondegenerate and small if $\frac{|x|}{|t|} \leq \frac{1}{2}$. According to Lemma 3.3.3, we obtain

$$|I^-(s, t, x)| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D-\ell}{2}} e^{-\frac{|\rho|}{2}s}. \quad (3.52)$$

On the other hand,

$$I^+(s, t, x) = \int_{\mathfrak{a}} d\lambda \chi_{\infty}^{\rho}(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}} e^{it\psi_{\iota}(\lambda)}$$

is easily estimated with no barycentric decomposition. Let

$$\tilde{\psi}_{\infty}(\lambda) = \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}} + \left\langle \frac{A(kx)}{t}, \lambda \right\rangle \quad \forall \lambda \in \text{supp } \chi_{\infty}^{\rho}.$$

Then $\tilde{\psi}_{\infty}$ is a symbol of order 1, and satisfies

$$|\tilde{\psi}_{\infty}(\lambda)| = \underbrace{\frac{|\lambda|^2}{\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}}}_{\geq \frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}} - \underbrace{\frac{\langle \lambda_0, \lambda \rangle}{\sqrt{|\lambda_0|^2+|\rho|^2}}}_{\leq \frac{|\lambda|}{\sqrt{3}}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)|\rho| > 0$$

on $\text{supp } \chi_{\infty}^{\rho}$ according to (3.17) and (3.18). By performing N integrations by parts based on

$$e^{it\psi_{\iota}(\lambda)} = \frac{1}{it} \tilde{\psi}_{\infty}(\lambda)^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} e^{it\psi_{\iota}(\lambda)},$$

we write

$$I_{\infty}^+(s, t, x) = (it)^{-N} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda e^{it\psi_{\iota}(\lambda)} \left\{ -\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \circ \frac{\lambda_j}{\tilde{\psi}_{\infty}(\lambda)} \right\}^N \left\{ \chi_{\infty}^{\rho}(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}} \right\}.$$

If some derivatives hit $\chi_{\infty}^{\rho}(\lambda)$, the range of the above integral is reduced to a spherical shell where $|\lambda| \asymp |\rho|$, and

$$I^+(s, t, x) \asymp |t|^{-N} e^{-s|\rho|}.$$

Assume next that no derivative is applied to χ_{∞}^{ρ} and

- N_1 derivatives are applied to the factors $\lambda_j/\tilde{\psi}_{\infty}(\lambda)$, which are inhomogeneous symbols of order 0, producing contributions which are $O(|\lambda|^{-N_1})$,
- N_2 derivatives are applied to the factor $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}$ which is not a symbol in general, producing a contribution which is $O(|\lambda|^{d-\ell})$,
- N_3 derivatives are applied to the factor $e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}}$, producing a contribution which is

$$O(s^{N_3} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}}),$$

with $N_1 + N_2 + N_3 = N$. Then we get the upper bound

$$|t|^{-N} s^{N_3} \int_{|\lambda|>|\rho|} d\lambda |\lambda|^{d-\ell-N_1} e^{-s\sqrt{|\lambda|^2+|\rho|^2}},$$

which yields

$$|I^+(s, t, x)| \lesssim |t|^{-N} s^N e^{-\frac{s}{2}|\rho|} \underbrace{\int_{|\lambda|>|\rho|} d\lambda |\lambda|^{d-\ell} e^{-\frac{s}{2}|\lambda|}}_{<+\infty}.$$

Together with (3.52), we obtain

$$|I(s, t, x)| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D-\ell}{2}} s^N e^{-\frac{s}{2}|\rho|}.$$

for all $s \geq 1$ and for $N \geq \frac{D}{2}$. We deduce

$$|\omega_t^{\sigma, \infty}(x)| \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} (1 + |x|)^{\frac{D-\ell}{2}} \varphi_0(x) \underbrace{\int_1^{+\infty} ds s^{\text{Re } \sigma - 1 + N} e^{-\frac{|\rho|}{2}s}}_{<+\infty}$$

for all $x \in \mathbb{X}$ and $|t| \geq 1$. □

3.4 Dispersive estimates

In this section, we prove our second main result about the $L^{q'} \rightarrow L^q$ estimates for the operator $W_t^\sigma = (-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$. We introduce the following criterion based on the Kunze-Stein phenomenon, which is crucial for the proof of dispersive estimates.

Lemma 3.4.1. *Let κ be a reasonable K -bi-invariant function on G . Then*

$$\|\cdot * \kappa\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \leq \left\{ \int_G dx \varphi_0(x) |\kappa(x)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}}$$

for every $q \in [2, +\infty)$. In the limit case $q = \infty$,

$$\|\cdot * \kappa\|_{L^1(\mathbb{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{X})} = \sup_{x \in G} |\kappa(x)|.$$

Remark 3.4.2. *This lemma has been proved in several contexts. For $q = 2$, it is the so-called Herz's criterion, see for instance [Cow97]. For $q > 2$, the proof carried out on Damek-Ricci spaces [APV11, Theorem 4.2] is adapted straightforwardly in the higher rank case.*

Theorem 3.4.3 (Small time dispersive estimate). *Let $d \geq 3$ and $0 < |t| < 1$. Then*

$$\|(-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}$$

for all $2 < q < +\infty$ and $\sigma \geq (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$.

Proof. We divide the proof into two parts, corresponding to the kernel decomposition $\omega_t^\sigma = \omega_t^{\sigma,0} + \omega_t^{\sigma,\infty}$. According to Lemma 3.4.1 and to the pointwise estimate Theorem 3.3.12, we obtain on one hand

$$\begin{aligned} \|\cdot * \omega_t^{\sigma,\infty}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} &\leq \left\{ \int_G dx \varphi_0(x) |\omega_t^{\sigma,\infty}(x)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}} \\ &\lesssim \left\{ \int_{\mathfrak{a}^+} dx^+ |\varphi_0(x^+)|^{\frac{q}{2}+1} \delta(x^+) \right\}^{\frac{2}{q}} \\ &\lesssim \left\{ \int_{\mathfrak{a}^+} dx^+ (1 + |x^+|)^{\frac{D-\ell}{2}(\frac{q}{2}+1)} e^{-(\frac{q}{2}-1)\langle \rho, x^+ \rangle} \right\}^{\frac{2}{q}} < +\infty \end{aligned}$$

for all $q > 2$. On the other hand, we use an analytic interpolation between $L^2 \rightarrow L^2$ and $L^1 \rightarrow L^\infty$ estimates for the family of operators $\widetilde{W}_t^{\sigma,0}$ defined by (3.12) in the vertical strip $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$. When $\operatorname{Re} \sigma = 0$, the spectral theorem yields

$$\|\widetilde{W}_t^{\sigma,0}\|_{L^2(\mathbb{X}) \rightarrow L^2(\mathbb{X})} = \|e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}\|_{L^2(\mathbb{X}) \rightarrow L^2(\mathbb{X})} = 1$$

for all $t \in \mathbb{R}^*$. According to Theorem 3.3.9, when $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$,

$$\|\widetilde{W}_t^{\sigma,0}\|_{L^1(\mathbb{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{X})} \lesssim \|\widetilde{\omega}_t^{\sigma,0}\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}}.$$

By Stein's interpolation theorem applied to the analytic family of operators $\widetilde{W}_t^{\sigma,0}$, we conclude for $\sigma = (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ that

$$\|W_t^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})},$$

for all $0 < |t| < 1$ and $2 < q < +\infty$. □

Theorem 3.4.4 (Large time dispersive estimate). *Assume that $|t| \geq 1$, $2 < q < +\infty$ and $\sigma \geq (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Then*

$$\|(-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}}.$$

Proof. We divide the proof into three parts, corresponding to the kernel decomposition

$$\omega_t^\sigma = \mathbb{1}_{B(0, C_\Sigma|t|)} \omega_t^{\sigma,0} + \mathbb{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, C_\Sigma|t|)} \omega_t^{\sigma,0} + \omega_t^{\sigma,\infty}$$

where the constant C_Σ has been specified in the proof of [Theorem 3.3.5](#). The first and the last terms are estimated by straightforward computations. By combining [Lemma 3.4.1](#) with the pointwise kernel estimates in [Theorem 3.3.5](#) and [Theorem 3.3.12](#), we obtain

$$\begin{aligned} & \|\cdot * \{\mathbb{1}_{B(0, C_\Sigma|t|)} \omega_t^{\sigma,0}\}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \\ & \lesssim \left\{ \int_G dx \varphi_0(x) |\mathbb{1}_{B(0, C_\Sigma|t|)}(x) \omega_t^{\sigma,0}(x)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}} \\ & \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} \underbrace{\left\{ \int_{|x^+| < C_\Sigma|t|} dx^+ (1 + |x^+|)^{\frac{D-\ell}{2}(q+1)} e^{-(\frac{q}{2}-1)\langle \rho, x^+ \rangle} \right\}^{\frac{2}{q}}}_{< +\infty} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \|\cdot * \omega_t^{\sigma,\infty}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \\ & \lesssim \left\{ \int_G dx \varphi_0(x) |\omega_t^{\sigma,\infty}(x)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}} \\ & \lesssim |t|^{-\frac{D}{2}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathfrak{a}^+} dx^+ (1 + |x^+|)^{\frac{D-\ell}{2} + (D-\frac{\ell}{2})\frac{q}{2}} e^{-(\frac{q}{2}-1)\langle \rho, x^+ \rangle} \right\}^{\frac{2}{q}}}_{< +\infty}. \end{aligned}$$

Here $q \leq 2 < \infty$ and the above estimates are uniform in the strip $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{d+1}{2}$. As far as the middle term is concerned, we use again the analytic interpolation for the family of operators associated with the convolution kernel $\mathbb{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, C_\Sigma|t|)} \tilde{\omega}_t^{\sigma,0}$. On the one hand, if $\operatorname{Re} \sigma = 0$, then

$$\|\cdot * \mathbb{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, C_\Sigma|t|)} \tilde{\omega}_t^{\sigma,0}\|_{L^2(\mathbb{X}) \rightarrow L^2(\mathbb{X})} \leq \|\cdot * \tilde{\omega}_t^{\sigma,0}\|_{L^2(\mathbb{X}) \rightarrow L^2(\mathbb{X})} + \|\cdot * \mathbb{1}_{B(0, C_\Sigma|t|)} \tilde{\omega}_t^{\sigma,0}\|_{L^2(\mathbb{X}) \rightarrow L^2(\mathbb{X})} \lesssim 1.$$

On the other hand, if $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$, we deduce from [Theorem 3.3.9](#) that

$$\|\cdot * \mathbb{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, C_\Sigma|t|)} \tilde{\omega}_t^{\sigma,0}\|_{L^1(\mathbb{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{X})} = \sup_{x \in \mathbb{X}} |\mathbb{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, C_\Sigma|t|)}(x) \tilde{\omega}_t^{\sigma,0}(x)| \lesssim |t|^{-N}$$

for any $N \in \mathbb{N}$. By using Stein's interpolation theorem between above $L^2 \rightarrow L^2$ and $L^1 \rightarrow L^\infty$ estimates, we obtain

$$\|\cdot * \mathbb{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, C_\Sigma|t|)} \omega_t^{\sigma,0}\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim |t|^{-N},$$

for all $|t| \geq 1$, $2 < q < +\infty$ and for any $N \in \mathbb{N}$. This concludes the proof. \square

Remark 3.4.5. *The standard TT^* method used to prove the Strichartz inequality breaks down in the critical case. In order to take care of these endpoints, we need the dyadic decomposition method carried out in [\[KeTa98\]](#) and the following stronger dispersive property, which is obtained by interpolation arguments.*

Corollary 3.4.6. *Let $d \geq 3$, $2 < q, \tilde{q} < +\infty$ and $\sigma \geq (d+1) \max(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})$. Then there exists a constant $C > 0$ such that the following dispersive estimates hold :*

$$\|(-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}\|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \leq C \begin{cases} |t|^{-(d-1) \max(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}})} & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{D}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

3.5 Strichartz inequality and applications

In this section, we use the dispersive properties proved in the previous section to establish the Strichartz inequality. This inequality serves as a tool for finding minimal regularity conditions on the initial data ensuring well-posedness of related semilinear wave equations. Such results were previously known to hold for real hyperbolic spaces [AnPi14] (actually for all noncompact symmetric spaces of rank one) and for noncompact symmetric spaces G/K with G complex [Zhw20]. For simplicity, we may assume that $\ell \geq 2$ throughout this section, thus $d \geq 4$.

Let $\sigma \in \mathbb{R}$ and $1 < q < \infty$. Recall that the Sobolev space $H^{\sigma,q}(\mathbb{X})$ is the image of $L^q(\mathbb{X})$ under the operator $(-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}}$, equipped with the norm

$$\|f\|_{H^{\sigma,q}(\mathbb{X})} = \|(-\Delta_{\mathbb{X}})^{\frac{\sigma}{2}} f\|_{L^q(\mathbb{X})}.$$

If $\sigma = N$ is a nonnegative integer, then $H^{\sigma,q}(\mathbb{X})$ coincides with the classical Sobolev space

$$W^{N,q}(\mathbb{X}) = \{f \in L^q(\mathbb{X}) \mid \nabla^j f \in L^q(\mathbb{X}), \forall 1 \leq j \leq N\},$$

defined by means of covariant derivatives. We refer to [Tri92] for more details about function spaces on Riemannian manifolds. Let us state the Strichartz inequality and some applications. The proofs are adapted straightforwardly from [AnPi14; APV12] and are therefore omitted.

3.5.1 Strichartz inequality

We study the linear inhomogeneous wave equation on \mathbb{X}

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{X}} u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (3.53)$$

whose solution is given by Duhamel's formula :

$$u(t, x) = (\cos t \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}) u_0(x) + \frac{\sin t \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}} u_1(x) + \int_0^t ds \frac{\sin(t-s) \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}} F(s, x).$$

Recall that a couple (p, q) is called admissible if $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ belongs to the triangle

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{2} \right] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} \geq \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

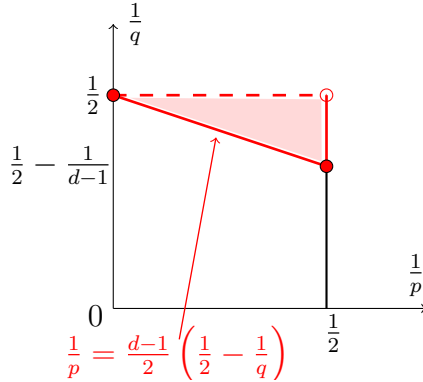


FIGURE 3.3 – Admissibility in dimension $d \geq 4$.

Theorem 3.5.1. *Let (p, q) and (\tilde{p}, \tilde{q}) be two admissible couples, and let*

$$\sigma \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma} \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right).$$

Then all solutions u to the Cauchy problem (3.53) satisfy the following Strichartz inequality :

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{X}} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{X}))} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{X})} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{X})} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}(\mathbb{X}))}. \quad (3.54)$$

Remark 3.5.2. *As have already been observed on hyperbolic spaces, the admissible set for \mathbb{X} is much larger than the admissible set for \mathbb{R}^d , which corresponds only to the lower edge of the triangle. This is due to large scale dispersive effects in negative curvature.*

The admissible range in (3.54) can be widened by using the Sobolev embedding theorem.

Corollary 3.5.3. *Assume that (p, q) and (\tilde{p}, \tilde{q}) are two couples corresponding to the square*

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

Let $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{R}$ such that $\sigma \geq \sigma(p, q)$, where

$$\sigma(p, q) = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) + \max \left\{0, \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{p}\right\},$$

and similarly $\tilde{\sigma} \geq \sigma(\tilde{p}, \tilde{q})$. Then the Strichartz inequality (3.54) holds for all solutions to the Cauchy problem (3.53).

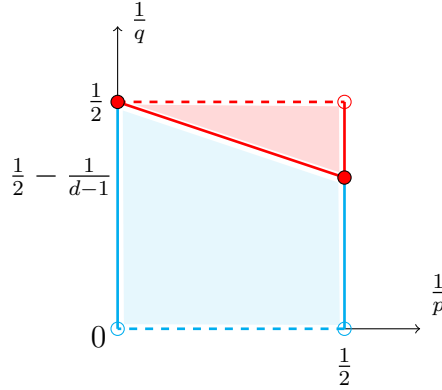


FIGURE 3.4 – Extended admissibility in dimension $d \geq 4$.

3.5.2 Global well-posedness for the semilinear wave equation

By combining the classical fixed point scheme with the previous Strichartz inequalities, one obtains the global well-posedness for the semilinear equation

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{X}} u(t, x) = F_\gamma(u(t, x)), \\ u(0, x) = f(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x). \end{cases} \quad (3.55)$$

on \mathbb{X} with small initial data f and g and power-like nonlinearities F satisfying

$$|F_\gamma(u)| \lesssim |u|^\gamma \quad \text{and} \quad |F_\gamma(u) - F_\gamma(v)| \lesssim (|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1}) |u - v|$$

where $\gamma > 1$. The global existence of solutions to the semilinear wave equation (3.55) on \mathbb{R}^d is related to the Strauss conjecture : the critical power γ_0 , i.e., the infimum of all $\gamma \in (1, \gamma_c]$ such that (3.55) has global solutions for small initial data, is the positive root of the quadratic equation

$$(d-1)\gamma_0^2 - (d+1)\gamma_0 - 2 = 0 \quad (d \geq 2).$$

In other words,

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{d-1} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right)^2 + \frac{2}{d-1}} > 1.$$

We refer to [Joh79; Kat80; Stra81; GLS97; Tat01] and the references therein for more details about the Strauss conjecture in the Euclidean setting. In negative curvature, the global existence for small

initial data has been proved, for any $\gamma \in (1, \gamma_c]$, on real hyperbolic spaces of dimension $d = 3$ [MeTa11; MeTa12] and then of any dimension $d \geq 2$ [AnPi14]. In other words, there is no phenomenon analogous to Strauss conjecture on such spaces. Similar results were extended later to Damek-Ricci spaces, which contain all noncompact symmetric spaces of rank one [APV15], and have been established recently on simply connected complete Riemannian manifolds with strictly negative sectional curvature [SSW19], and on non-trapping asymptotically hyperbolic manifolds [SSWZ19]. Next theorem shows that the same phenomenon holds on general noncompact symmetric spaces. More precisely, we prove that the semilinear wave equation (3.55) on \mathbb{X} is globally well-posed.

To state the following theorem, we need to introduce some notation. Consider the following powers

$$\gamma_1 = 1 + \frac{3}{d}, \quad \gamma_2 = 1 + \frac{2}{\frac{d-1}{2} + \frac{2}{d-1}}, \quad \gamma_3 = \begin{cases} 1 + \frac{4}{d-2} & \text{if } d \leq 5, \\ \frac{d-1}{2} + \frac{3}{d+1} - \sqrt{\left(\frac{d-3}{2} + \frac{3}{d+1}\right)^2 - 4\frac{d-1}{d+1}} & \text{if } d \geq 6, \end{cases}$$

and the following curves

$$\sigma_1(\gamma) = \frac{d+1}{4} - \frac{(d+1)(d+5)}{8d} \frac{1}{\gamma - \frac{d+1}{2d}}, \quad \sigma_2(\gamma) = \frac{d+1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad \sigma_3(\gamma) = \frac{d}{2} - \frac{2}{\gamma-1}.$$

Theorem 3.5.4. *The semilinear Cauchy problem (3.55) is globally well-posed for small initial data in $H^{\sigma,2}(\mathbb{X}) \times H^{\sigma-1,2}(\mathbb{X})$ provided that*

$$\begin{cases} \sigma > 0 & \text{if } 1 < \gamma \leq \gamma_1, \\ \sigma \geq \sigma_1(\gamma) & \text{if } \gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2, \\ \sigma \geq \sigma_2(\gamma) & \text{if } \gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_c, \\ \sigma \geq \sigma_3(\gamma) & \text{if } \gamma_c \leq \gamma \leq \gamma_3. \end{cases}$$

More precisely, in each case, there exists $2 \leq p, q < \infty$ such that for any small initial data (f, g) in $H^{\sigma,2}(\mathbb{X}) \times H^{\sigma-1,2}(\mathbb{X})$, the Cauchy problem (3.55) has a unique solution in the Banach space

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}; H^{\sigma,2}(\mathbb{X})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; H^{\sigma-1,2}(\mathbb{X})) \cap L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{X})).$$

3.6 Further results for Klein-Gordon equations

The kernel estimates and dispersive estimates proved above for the wave equation still hold if we replace the operator $(-\Delta_{\mathbb{X}})^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}}$ by $\mathbf{D}^{-\sigma} e^{it\mathbf{D}}$, where

$$\mathbf{D} = \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}} - |\rho|^2 + \kappa^2} \quad \text{with } \kappa > 0.$$

Then, for every admissible couple (p, q) , the operator

$$\mathbf{T}f(t, x) = \mathbf{D}_x^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\mathbf{D}_x} f(x)$$

is again bounded from $L^2(\mathbb{X})$ to $L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{X}))$, and its adjoint

$$\mathbf{T}^*F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \mathbf{D}_x^{-\frac{\sigma}{2}} e^{-is\mathbf{D}_x} F(s, x)$$

from $L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{X}))$ to $L^2(\mathbb{X})$. While L^2 Sobolev spaces may be defined in terms of \mathbf{D} , we need the operator

$$\tilde{\mathbf{D}} = \sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}} - |\rho|^2 + \tilde{\kappa}^2} \quad \text{with } \tilde{\kappa} \geq |\rho|,$$

in order to define L^q Sobolev spaces when q gets large. As $\tilde{\mathbf{D}}^{-\frac{\sigma}{2}} \circ \mathbf{D}^{\frac{\sigma}{2}}$ is a topological automorphism of $L^2(\mathbb{X})$, the operator

$$\tilde{\mathbf{T}}f(t, x) = \tilde{\mathbf{D}}_x^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\mathbf{D}_x} f(x)$$

is also bounded from $L^2(\mathbb{X})$ to $L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{X}))$, and its adjoint

$$\tilde{\mathbf{T}}^*F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \tilde{\mathbf{D}}_x^{-\frac{\sigma}{2}} e^{-is\mathbf{D}_x} F(s, x)$$

from $L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{X}))$ to $L^2(\mathbb{X})$, hence

$$\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{T}}^*F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \tilde{\mathbf{D}}_x^{-\sigma} e^{i(t-s)\mathbf{D}_x} F(s, x)$$

from $L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{X}))$ to $L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}; L^{\tilde{q}}(\mathbb{X}))$ for all admissible couples (p, q) and (\tilde{p}, \tilde{q}) . We deduce that [Theorem 3.5.1](#) and [Corollary 3.5.3](#) still hold for solutions to the inhomogeneous Klein-Gordon equation

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \mathbf{D}^2 u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x), \end{cases}$$

and that the corresponding semilinear equation is globally well-posed with low regularity data, see [Theorem 3.5.4](#).

Chapitre 4

Wave and Klein-Gordon equations on certain locally symmetric spaces

Ce chapitre reprend l'article [Zhw19] à apparaître dans *Journal of Geometric Analysis*.

Résumé : *Cet chapitre est consacré à l'étude des propriétés dispersives des équations des ondes et de Klein-Gordon linéaires sur une classe des espaces localement symétriques. En conséquence, nous établissons l'inégalité de Strichartz pour une grande famille des paires admissibles et prouvons que, comme sur les espaces hyperboliques réels, les équations semi-linéaires correspondantes sont globalement bien posées avec la régularité faible.*

This chapter resumes the article [Zhw19] to appear in *Journal of Geometric Analysis*.

Abstract : *This chapter is devoted to study the dispersive properties of the linear wave and Klein-Gordon equations on a class of locally symmetric spaces. As consequences, we establish the Strichartz estimate for a large family of admissible pairs and prove global well-posedness results for the corresponding semilinear equation with low regularity data as on real hyperbolic spaces.*

Summary

4.1	Introduction	74
4.1.1	Notations	74
4.1.2	Assumptions	75
4.1.3	Statement of the results	75
4.2	Preliminaries	77
4.2.1	Spherical analysis on noncompact symmetric spaces	77
4.2.2	Pointwise estimates of the wave kernel on symmetric spaces	78
4.3	Dispersive properties on locally symmetric spaces	79
4.4	Strichartz inequality and applications	83
4.4.1	Strichartz inequality	84
4.4.2	Global well-posedness for the semilinear Klein-Gordon equation	86

4.1 Introduction

Let \mathbb{Y} be a Riemannian manifold and denote by $\Delta_{\mathbb{Y}}$ the Laplace-Beltrami operator on \mathbb{Y} . The theory is well established for the following wave equation on $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{R}^d} u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

where the solutions u satisfy the Strichartz estimates :

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{R}^d))} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}(\mathbb{R}^d))},$$

on any interval $I \subseteq \mathbb{R}$ under the assumptions

$$\sigma = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma} = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right),$$

and the couples $(p, q), (\tilde{p}, \tilde{q}) \in (2, +\infty] \times [2, 2\frac{d-1}{d-3}]$ fulfill the admissibility conditions :

$$\frac{1}{p} = \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{and} \quad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right).$$

These estimates serve as a tool for finding minimal regularity conditions on the initial data ensuring well-posedness for corresponding semilinear wave equations, which is addressed in [Kap94], and almost fully answered in [LiSo95; GLS97; KeTa98; DGK01]. Analogous results have been found for the Klein-Gordon equation

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{R}^d} u(t, x) + cu(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (4.2)$$

with $c = 1$, see [GiVe95; BaGe99; Nak99; MNO04].

Given the rich Euclidean theory, it is natural to look at the corresponding equations on more general manifolds. We consider in the present paper a class of noncompact locally symmetric spaces \mathbb{Y} , on which we study the Klein-Gordon equation (4.2) with $c \geq -\rho^2$, where ρ is a positive constant depending on the structure of \mathbb{Y} and defined in the next section. Due to large-scale dispersive effects in negative curvature, we expect stronger results than in the Euclidean setting, as on real hyperbolic space, see [APV12; AnPi14]. In the critical case $c = -\rho^2$, (4.2) is called the shifted wave equation. To our knowledge, it was first considered in [Fon94; Fon97] in low dimensions $d = 2$ and $d = 3$. In [APV12; APV15], a detailed analysis of the shifted wave equation was carried out on real hyperbolic spaces and on Damek-Ricci spaces, which contains all rank one symmetric spaces of noncompact type. In the non-shifted case $c > -\rho^2$, similar results on real hyperbolic spaces were obtained in [AnPi14]. In the recent paper [FMM18], the Schrödinger equation was considered on certain locally symmetric spaces. In the present paper, we study the wave and Klein-Gordon equations in the same spirit.

4.1.1 Notations

We adopt the standard notation (see for instance [Hel78; Hel00; GaVa88; BuOl00]). Let G be a semisimple Lie group, connected, noncompact, with finite center, and K be a maximal compact subgroup of G . The homogeneous space $\mathbb{X} = G/K$ is a Riemannian symmetric space of noncompact type, whose dimension is denoted by d . Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ be the Cartan decomposition of its Lie algebra. The Killing form of \mathfrak{g} induces a K -invariant inner product on \mathfrak{p} , and hence a G -invariant Riemannian metric on G/K . Fix a maximal abelian subspace \mathfrak{a} in \mathfrak{p} . The symmetric space \mathbb{X} is said to have rank one if $\dim \mathfrak{a} = 1$. Let $\Sigma \subset \mathfrak{a}$ be the root system of $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ and denote by W the Weyl group associated to Σ . Choose a set Σ^+ of positive roots, let $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ be the corresponding positive Weyl chamber and $\overline{\mathfrak{a}^+}$ its closure. Denote by ρ the half sum of positive roots counted with their multiplicities :

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_{\alpha} \alpha,$$

where m_α is the dimension of root space $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \langle \alpha, H \rangle X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$.

Let Γ be a discrete torsion-free subgroup of G . The locally symmetric space $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$, equipped with the Riemannian structure inherited from \mathbb{X} becomes a Riemannian manifold. We say that \mathbb{Y} has rank one if \mathbb{X} has rank one. Moreover Γ is called convex cocompact if the quotient group $\Gamma \backslash \text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ is compact, where $\text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ is the convex hull of the limit set Λ_Γ of Γ . We denote by Δ the Laplace-Beltrami operator, by $d(\cdot, \cdot)$ the Riemannian distance, and by dx the associated measure, both on \mathbb{X} and \mathbb{Y} . Consider the Poincaré series

$$P_x(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)} \quad \forall s > 0, \forall x, y \in \mathbb{X},$$

and denote by $\delta(\Gamma)$ its critical exponent :

$$\delta(\Gamma) = \inf \{s > 0 \mid P_x(x, y) < +\infty\}.$$

4.1.2 Assumptions

In this paper, $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ is a rank one locally symmetric space such that Γ is convex cocompact and $\delta(\Gamma) < \rho$. Let us comment a few words on these assumptions. Wave type equations on noncompact rank one symmetric spaces are well understood. Sharp pointwise estimates of wave kernels on \mathbb{X} (see [Sect. 4.2.2](#)), which were obtained in [[APV12](#); [AnPi14](#)], allow us to deal with wave kernels on a locally symmetric space \mathbb{Y} . Notice that such information is lacking in higher rank. The rank one symmetric spaces of the noncompact type are the hyperbolic spaces $\mathbf{H}^n(\mathbb{F})$ with $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ or $\mathbf{H}^2(\mathbb{O})$. In particular, we have $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$ and $\mathfrak{a}^+ \cong \mathbb{R}_+^*$, hence ρ is just a positive constant depending on the structure of \mathbb{X} . Specifically, as a direct consequence of the assumption $\delta(\Gamma) < \rho$, the series (4.11) defining the wave kernel on \mathbb{Y} is absolutely convergent, see [Proposition 4.3.1](#). In addition, according to [[Cor90](#)], the bottom λ_0 of the L^2 -spectrum of $-\Delta_{\mathbb{Y}}$ is equal to ρ^2 , as on \mathbb{X} . Consequently, we obtain an analogous L^2 Kunze-Stein phenomenon on \mathbb{Y} without further assumptions, see [Proposition 4.3.2](#). Notice that $\lambda_0 = \rho^2 > 0$ implies $\text{Vol}(\mathbb{Y}) = +\infty$, while $\lambda_0 = 0$ if \mathbb{Y} is a lattice. At last, the convex cocompactness assumption implies a uniform upper bound of the Poincaré series, see [Lemma 4.3.3](#), which is crucial for the L^1 - L^∞ boundedness of wave propagators on \mathbb{Y} .

Remark 4.1.1. *The Schrödinger equation is studied in [[FMM18](#)] under slightly different assumptions, our well-posedness results hold also in that setting.*

4.1.3 Statement of the results

Consider the operator $\mathbf{D} = \sqrt{-\Delta - \rho^2 + \kappa^2}$ with $\kappa > 0$, then the Klein-Gordon equations (4.2) becomes

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \mathbf{D}_x^2 u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (4.3)$$

with $c = \kappa^2 - \rho^2 > -\rho^2$. Notice that (4.3) is the wave equation when $\kappa = \rho$ and becomes the shifted wave equation in the limit case $\kappa = 0$. Consider another operator $\tilde{\mathbf{D}} = \sqrt{-\Delta - \rho^2 + \tilde{\kappa}^2}$ with $\tilde{\kappa} > \rho$. We denote by ω_t^σ the radial convolution kernel of the wave operator $W_t^\sigma = \tilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\mathbf{D}}$ on the symmetric space \mathbb{X} :

$$W_t^\sigma f(x) = f * \omega_t^\sigma(x) = \int_G \omega_t^\sigma(y^{-1}x) f(y) dy, \quad (4.4)$$

where f is any reasonable function on \mathbb{X} , see [Sect. 4.2.2](#) for more details. By K -bi-invariance of the kernel ω_t^σ , we deduce that $W_t^\sigma f$ is left Γ -invariant and right K -invariant if f is defined on the locally symmetric space \mathbb{Y} . Thus the wave operator on \mathbb{Y} , denoted by \widehat{W}_t^σ , is also defined by (4.4). Consider the wave kernel $\widehat{\omega}_t^\sigma$ on \mathbb{Y} , which is given by

$$\widehat{\omega}_t^\sigma(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \omega_t^\sigma(y^{-1}\gamma x) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Then the wave operator \widehat{W}_t^σ on \mathbb{Y} is an integral operator :

$$\widehat{W}_t^\sigma f(x) = \int_{\mathbb{Y}} \widehat{\omega}_t^\sigma(x, y) f(y) dy,$$

see [Proposition 4.3.1](#). The aim of this paper is to prove the following dispersive properties :

Theorem 4.1.2. For $d \geq 3$, $2 < q < +\infty$ and $\sigma \geq (d+1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$,

$$\left\| \widehat{W}_t^\sigma \right\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \lesssim \begin{cases} |t|^{-(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Remark 4.1.3. In dimension $d = 2$, there is an additional logarithmic factor in the small time bound, which becomes $|t|^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} (1 - \log |t|)^{1 - \frac{2}{q}}$, see [Theorem 4.2.1](#) in the next section.

Remark 4.1.4. At the endpoint $q = 2$, $t \mapsto e^{it\mathbf{D}}$ is a one-parameter group of unitary operators on $L^2(\mathbb{Y})$.

By applying the classical TT^* method and by using the previous dispersive properties, we obtain the Strichartz estimate

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{Y}} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{Y}))} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{Y})} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{Y})} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}(\mathbb{Y}))}$$

for the solutions u of (4.3), see [Sect. 4.4](#) for more information about the Sobolev spaces $H^{-\sigma, q}(\mathbb{Y})$. Here $I \subset \mathbb{R}$ is any time interval, possibly unbounded,

$$\sigma \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma} \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}\right),$$

and the couples (p, q) and (\tilde{p}, \tilde{q}) are admissible, which means that $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$, $\left(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}}\right)$ belong, in dimension $n \geq 4$ (see [Sect. 4.4](#) for the lower dimensions) to the triangle

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \mid \frac{1}{p} \geq \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{d-1}\right) \right\}.$$

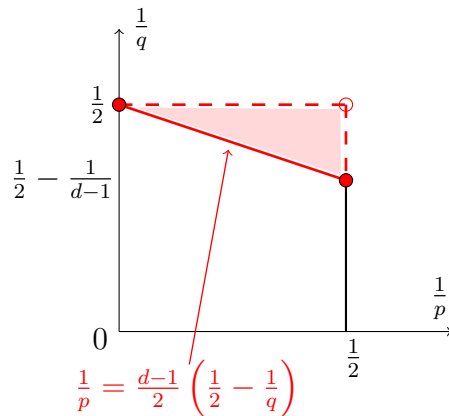


FIGURE 4.1 – Admissibility in dimension $d \geq 4$.

Notice that the admissible set for \mathbb{Y} is larger than the admissible set for \mathbb{R}^d which corresponds only to the lower edge of the triangle. In comparison with \mathbb{X} , we loose the right edge of the triangle, which corresponds to the critical case $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{d-1}$, this will be explained in [Sect. 4.4](#). Notice that we obtain nevertheless the same well-posedness results as on \mathbb{X} .

This paper is organized as follows. In Sect. 4.2, we review spherical analysis on noncompact symmetric spaces, and recall pointwise estimates of wave kernels on rank one symmetric space obtained in [AnPi14]. In Sect. 4.3, after proving the necessary lemmas, we prove the dispersive estimate by an interpolation argument. As a consequence, we deduce the Strichartz estimate and obtain well-posedness results for the semilinear Klein-Gordon equation in Sect. 4.4.

4.2 Preliminaries

4.2.1 Spherical analysis on noncompact symmetric spaces

We review in this section some elementary facts about noncompact symmetric spaces. We refer to [Hel78; Hel00; GaVa88], for more details. Recall that $\overline{\mathfrak{a}^+}$ is the closure of the positive Weyl chamber \mathfrak{a}^+ . Denote by $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$ the nilpotent Lie subalgebra of \mathfrak{g} associated with Σ^+ , and by N the corresponding Lie subgroup of G . Then we have the following two decompositions of G :

$$\begin{cases} G = N(\exp \mathfrak{a})K & \text{(Iwasawa),} \\ G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}^+})K & \text{(Cartan).} \end{cases}$$

In the Cartan decomposition, the Haar measure on G writes

$$\int_G dx f(x) = \text{const.} \int_K dk_1 \int_{\mathfrak{a}^+} dH \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\sinh \alpha(H))^{m_\alpha} \int_K dk_2 f(k_1(\exp H)k_2). \quad (4.6)$$

In the rank one case, which we consider in this paper,

$$\int_{\mathfrak{a}^+} dH \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\sinh \alpha(H))^{m_\alpha} = \text{const.} \int_0^{+\infty} dr (\sinh r)^{m_\alpha} (\sinh 2r)^{m_{2\alpha}}$$

where

$$(\sinh r)^{m_\alpha} (\sinh 2r)^{m_{2\alpha}} \lesssim e^{2\rho r} \quad \forall r > 0. \quad (4.7)$$

Denote by $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ the Schwartz space of K -bi-invariant functions on G . The spherical Fourier transform \mathcal{H} is defined by

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_G dx \varphi_{-\lambda}(x) f(x) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a} \cong \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{S}(K \backslash G / K).$$

Here $\varphi_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(K \backslash G / K)$ is a spherical function, which can be characterized as a radial eigenfunction of the negative Laplace-Beltrami operator $-\Delta$ satisfying

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_\lambda(x) = (\lambda^2 + \rho^2) \varphi_\lambda(x), \\ \varphi_\lambda(\mathbf{0}) = 1. \end{cases} \quad (4.8)$$

In the noncompact case, the spherical function is characterized by

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K dk e^{(i\lambda + \rho)A(kx)} \quad \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}, \quad (4.9)$$

where $A(kx)$ is the unique \mathfrak{a} -component in the Iwasawa decomposition of kx . Denote by $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$ the subspace of W -invariant functions in the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$. Then \mathcal{H} is an isomorphism between $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ and $\mathcal{S}(\mathfrak{a})^W$. The inverse spherical Fourier transform is defined by

$$f(x) = \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(x) \mathcal{H}f(\lambda) \quad \forall x \in G, \forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W,$$

where $\mathbf{c}(\lambda)$ is the Harish-Chandra \mathbf{c} -function.

4.2.2 Pointwise estimates of the wave kernel on symmetric spaces

We recall in this section the pointwise wave kernel estimates on rank one symmetric space obtained in [AnPi14] and [APV15]. Via the spherical Fourier transform and (4.8), the negative Laplace-Beltrami operator $-\Delta$ corresponds to $\lambda^2 + \rho^2$, hence the operators $\mathbf{D} = \sqrt{-\Delta - \rho^2 + \kappa^2}$ and $\tilde{\mathbf{D}} = \sqrt{-\Delta - \rho^2 + \tilde{\kappa}^2}$ to

$$\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} \quad \text{and} \quad \sqrt{\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2}.$$

By the inverse spherical Fourier transform, the radial convolution kernel ω_t^σ of $W_t^\sigma = \tilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\mathbf{D}}$ on \mathbb{X} is given by

$$\omega_t^\sigma(r) = \text{const.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \varphi_\lambda(r) (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2}}$$

for suitable exponents $\sigma \in \mathbb{R}$. Consider smooth even cut-off functions χ_0 and χ_∞ on \mathbb{R} such that

$$\begin{cases} \chi_0(\lambda) = 1 & \forall |\lambda| \leq 1, \\ \chi_\infty(\lambda) = 1 & \forall |\lambda| \geq 2, \end{cases}$$

and $\chi_0(\lambda) + \chi_\infty(\lambda) = 1$. Let us split up

$$\begin{aligned} \omega_t^\sigma(r) &= \omega_t^{\sigma,0}(r) + \omega_t^{\sigma,\infty}(r) \\ &= \text{const.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \chi_0(\lambda) (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2}} \varphi_\lambda(r) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \\ &\quad + \text{const.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2}} \varphi_\lambda(r) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}. \end{aligned}$$

To avoid possible singularities of the kernel $\omega_t^{\sigma,\infty}$, see [Ste93, Chap 9], we consider the analytic family of operators

$$\tilde{W}_t^{\sigma,\infty} = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} \chi_\infty(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{D}}^{-\sigma} e^{it\mathbf{D}}, \quad (4.10)$$

in the vertical strip $0 \leq \text{Re } \sigma \leq \frac{d+1}{2}$, and their kernels

$$\tilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}(r) = \text{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} - \sigma)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2}} \varphi_\lambda(r) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}.$$

The following pointwise estimates of the kernels $\omega_t^{\sigma,0}$ and $\tilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}$, which were obtained in [AnPi14] for real hyperbolic spaces, extend straightforwardly to all rank one Riemannian symmetric spaces of the noncompact type.

Theorem 4.2.1. *For all $\sigma \in \mathbb{R}$, the kernel $\omega_t^{\sigma,0}$ satisfies*

$$|\omega_t^{\sigma,0}(r)| \lesssim \begin{cases} \varphi_0(r) & \forall t \in \mathbb{R}, \forall r \geq 0, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} (1+r) \varphi_0(r) & \forall |t| \geq 1, \forall 0 \leq r \leq \frac{|t|}{2}. \end{cases}$$

For all $\sigma \in \mathbb{C}$ with $\text{Re } \sigma = \frac{d+1}{2}$, and for every $r \geq 0$, the following estimates hold for the kernel $\tilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}$:

$$|\tilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}(r)| \lesssim \begin{cases} |t|^{-\frac{d-1}{2}} e^{-\rho r} & \forall 0 < |t| < 1, \text{ if } d \geq 3, \\ |t|^{-N} (1+r)^N \varphi_0(r) & \forall |t| \geq 1, \forall N \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

In the 2-dimensional case, the small time estimate of $\tilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}$ reads

$$|\tilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}(r)| \lesssim |t|^{-\frac{1}{2}} (1 - \log |t|) e^{-\frac{r}{2}} \quad \forall 0 < |t| < 1.$$

4.3 Dispersive properties on locally symmetric spaces

In this section, we prove our main result, namely [Theorem 4.1.2](#). Let us first describe the wave operator \widehat{W}_t^σ on locally symmetric space \mathbb{Y} . Recall that the wave kernel on \mathbb{Y} is given by

$$\widehat{\omega}_t^\sigma(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \omega_t^\sigma(y^{-1}\gamma x) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}. \quad (4.11)$$

Proposition 4.3.1. *The series (4.11) is convergent for every $x, y \in \mathbb{X}$, and the wave operator on \mathbb{Y} is given by*

$$\widehat{W}_t^\sigma f(x) = \int_{\mathbb{Y}} dy \widehat{\omega}_t^\sigma(x, y) f(y)$$

for any reasonable function f on \mathbb{Y} .

Proof. According to the Cartan decomposition of G , we can write $y^{-1}\gamma x = k_\gamma(\exp H_\gamma)k'_\gamma$ with $H_\gamma \in \mathbb{R}_+$ and $k_\gamma, k'_\gamma \in K$. Notice that $H_\gamma = d(x, \gamma y)$. Then, by the K -bi-invariance of ω_t^σ , we have

$$|\widehat{\omega}_t^\sigma(x, y)| = \left| \sum_{\gamma \in \Gamma} \omega_t^\sigma(\exp H_\gamma) \right| \lesssim \sum_{\gamma \in \Gamma} |\omega_t^{\sigma, 0}(\exp H_\gamma)| + \sum_{\gamma \in \Gamma} |\tilde{\omega}_t^{\sigma, \infty}(\exp H_\gamma)|.$$

For the first part, [Theorem 4.2.1](#) implies that for all $H_\gamma \geq 0$,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\omega_t^{\sigma, 0}(\exp H_\gamma)| \lesssim \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi_0(\exp H_\gamma) \lesssim \sum_{\gamma \in \Gamma} (1 + H_\gamma) e^{-\rho H_\gamma}.$$

By choosing $0 < \varepsilon < \rho - \delta(\Gamma)$, we obtain

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\omega_t^{\sigma, 0}(\exp H_\gamma)| \lesssim \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-(\delta(\Gamma) + \varepsilon)d(x, \gamma y)} = P_{\delta(\Gamma) + \varepsilon}(x, y) < +\infty.$$

The second part is handled similarly and thus omitted. Hence the series (4.11) is convergent. According to (4.4), we know that

$$\widehat{W}_t^\sigma f(x) = \int_G dy \omega_t^\sigma(y^{-1}x) f(y) = \int_{\mathbb{X}} dy \omega_t^\sigma(y^{-1}x) f(y)$$

since ω_t^σ is K -bi-invariant and f is right K -invariant. By using Weyl's formula and the fact that f is left Γ -invariant, we deduce that

$$\widehat{W}_t^\sigma f(x) = \int_{\Gamma \backslash \mathbb{X}} dy \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma y) \omega_t^\sigma(y^{-1}\gamma x) \right) = \int_{\mathbb{Y}} dy \widehat{\omega}_t^\sigma(x, y) f(y).$$

□

Next, we introduce the following version of the L^2 Kunze-Stein phenomenon on locally symmetric space \mathbb{Y} , which plays an essential role in the proof of the dispersive estimate.

Proposition 4.3.2. *Let ψ be a reasonable bi- K -invariant functions on G , e.g., in the Schwartz class. Then*

$$\| \cdot * \psi \|_{L^2(\mathbb{Y}) \rightarrow L^2(\mathbb{Y})} \leq \int_G dx |\psi(x)| \varphi_0(x). \quad (4.12)$$

The Kunze-Stein phenomenon is a remarkable convolution property on semisimple Lie groups and symmetric spaces (see e.g., [KuSt60], [Her70], [Cow78] and [Ion00a]), which was extended to some classes of locally symmetric spaces in [LoMa09] and [LoMa14]. Let us prove [Proposition 4.3.2](#) along the lines of [LoMa14] in our setting where $\text{rank } \mathbb{X} = 1$, $\delta(\Gamma) < \rho$ and with no additional assumption.

Proof. Since G is a connected semisimple Lie group, it is of type I, [Har54; Dix77]. Denote by \widehat{G} the unitary dual of G and by \widehat{G}_K the spherical subdual. We write $L^2(\Gamma \backslash G)$ as the direct integral

$$L^2(\Gamma \backslash G) \cong \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi} d\nu(\pi)$$

and

$$L^2(\mathbb{Y}) \cong \int_{\widehat{G}_K}^{\oplus} (\mathcal{H}_{\pi})^K d\nu(\pi) \quad (4.13)$$

accordingly, where ν is a positive measure on \widehat{G} , see for instance [BuOl00]. Recall that $(\mathcal{H}_{\pi})^K = \mathbb{C}e_{\pi}$ is one-dimensional for every $\pi \in \widehat{G}_K$. Recall moreover that, in rank one, \widehat{G}_K is parameterized by a subset of $\mathbb{C}/\pm 1$. Specifically, \widehat{G}_K consists of

- the unitary spherical principal series $\pi_{\pm\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}/\pm 1$),
- the trivial representation $\pi_{\pm i\rho} = 1$,
- the complementary series $\pi_{\pm i\lambda}$ ($\lambda \in I$), where

$$I = \begin{cases} (0, \rho) & \text{if } \mathbb{X} = \mathbf{H}^n(\mathbb{R}) \text{ or } \mathbf{H}^n(\mathbb{C}), \\ (0, \frac{m_{\alpha}}{2} + 1] & \text{if } \mathbb{X} = \mathbf{H}^n(\mathbb{H}) \text{ or } \mathbf{H}^2(\mathbb{O}). \end{cases}$$

This result goes back to [Kos69]. Under the assumption $\delta(\Gamma) < \rho$, we know that $\lambda_0 = \rho^2$ is the bottom of the spectrum of $-\Delta$ on $L^2(\mathbb{Y})$. As $-\Delta$ acts on $(\mathcal{H}_{\pi})^K$ by multiplication by $\lambda^2 + \rho^2$, we deduce that (4.13) involves only tempered representations, i.e., representations π_{λ} with $\lambda \in \mathbb{R}/\pm 1$. Moreover, as the right convolution by $\psi \in \mathcal{S}(K \backslash G/K)$ acts on $(\mathcal{H}_{\pi_{\lambda}})^K$ by multiplication by

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_G dx \varphi_{\lambda}(x) f(x),$$

where $\varphi_{\lambda}(x) = \langle \pi_{\lambda}(x)e_{\pi_{\lambda}}, e_{\pi_{\lambda}} \rangle$ is the spherical function (4.8), we deduce from (4.9) that

$$\|\cdot * \psi\|_{L^2(\mathbb{Y}) \rightarrow L^2(\mathbb{Y})} \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \int_G dx \varphi_{\lambda}(x) \psi(x) \right| \leq \int_G dx \varphi_0(x) |\psi(x)|.$$

□

The following two lemmas are used in the proof of dispersive estimates.

Lemma 4.3.3. *If Γ is convex cocompact, then there exists a constant $C > 0$ such that for all $x, y \in \mathbb{X}$,*

$$P_x(x, y) \leq CP_s(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad \forall s > 0,$$

where $\mathbf{0} = eK$ denotes the origin of \mathbb{X} .

Proof. Let $\text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})$ be the convex hull of the limit set Λ_{Γ} of Γ . Recall that Γ is said to be convex cocompact if $\Gamma \backslash \text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})$ is compact. Let F be a compact fundamental domain containing $\mathbf{0}$ for the action of Γ on $\text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})$. Then, for each $z \in \text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})$, there exists $\gamma \in \Gamma$ and $z' \in F$ such that $z = \gamma z'$. The orthogonal projection $\pi_{\perp} : \mathbb{X} \rightarrow \text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})$ is defined as follows. For every x in \mathbb{X} , $\pi_{\perp}(x)$ is the unique point in $\text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})$ such that

$$d(x, \pi_{\perp}(x)) = d(x, \text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})) = \inf_{y \in \text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})} d(x, y).$$

Then, for all $x, y \in \mathbb{X}$, we have (see [BrHa99], Chap II, Proposition 2.4.)

$$d(\pi_{\perp}(x), \pi_{\perp}(y)) \leq d(x, y).$$

On the other hand, for all $x \in \mathbb{X}$ and $\gamma \in \Gamma$,

$$d(\gamma x, \pi_{\perp}(\gamma x)) = d(\gamma x, \text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})) = d(x, \text{Conv}(\Lambda_{\Gamma})),$$

since Λ_Γ and $\text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ are Γ -invariant. Thus

$$d(\gamma x, \pi_\perp(\gamma x)) = d(x, \pi_\perp(x)) = d(\gamma x, \gamma \pi_\perp(x)),$$

which implies that, for all $x \in X$ and $\gamma \in \Gamma$, $\pi_\perp(\gamma x) = \gamma \pi_\perp(x)$. Therefore, for every $x, y \in \mathbb{X}$ and $s > 0$, the Poincaré series satisfies :

$$\begin{aligned} P_x(x, y) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\pi_\perp(x), \pi_\perp(\gamma y))} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\pi_\perp(x), \gamma \pi_\perp(y))} = P_s(\pi_\perp(x), \pi_\perp(y)), \end{aligned} \quad (4.14)$$

with $\pi_\perp(x), \pi_\perp(y) \in \text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$. Moreover, as there exist $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ and $x', y' \in F$ such that $\pi_\perp(x) = \gamma_1 x'$, $\pi_\perp(y) = \gamma_2 y'$, we have

$$P_s(\pi_\perp(x), \pi_\perp(y)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x', \gamma_1^{-1} \gamma \gamma_2 y')} = \sum_{\gamma' \in \Gamma} e^{-sd(x', \gamma' y')} = P_s(x', y'). \quad (4.15)$$

Since $x', y' \in F$, the triangular inequality yields

$$d(\mathbf{0}, \gamma' \mathbf{0}) \leq d(\mathbf{0}, x') + d(x', \gamma' y') + d(\gamma' y', \gamma' \mathbf{0}) \leq d(x', \gamma' y') + 2 \text{diam}(F).$$

Hence

$$P_s(x', y') \leq e^{2s \text{diam}(F)} P_s(\mathbf{0}, \mathbf{0}). \quad (4.16)$$

We conclude by combining (4.14), (4.15) and (4.16). \square

Consider the radial weight function defined by

$$\mu(x) = e^{(\delta(\Gamma) + \varepsilon)d(x, \mathbf{0})},$$

with $0 < \varepsilon < \rho - \delta(\Gamma)$. We prove the following lemma by applying previous results.

Lemma 4.3.4. *Let g be a radial reasonable function on \mathbb{X} . Then the bilinear operator $B(f, g) = f * (\mu^{-1}g)$ satisfies the following estimate :*

$$\|B(\cdot, g)\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \leq C_q \left(\int_G dx \varphi_0(x) \mu^{-1}(x) |g(x)|^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{2}{q}}$$

for all $2 \leq q \leq \infty$.

Proof. According to [Proposition 4.3.2](#),

$$\|B(\cdot, g)\|_{L^2(\mathbb{Y}) \rightarrow L^2(\mathbb{Y})} \leq \int_G dx \varphi_0(x) \mu^{-1}(x) |g(x)|. \quad (4.17)$$

Since f is left Γ -invariant, we can rewrite

$$B(f, g)(x) = \int_{\mathbb{X}} dy (\mu^{-1}g)(y^{-1}x) f(y) = \int_{\Gamma \backslash \mathbb{X}} dy \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} (\mu^{-1}g)(y^{-1}\gamma x) \right) f(y),$$

with

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma} (\mu^{-1}g)(y^{-1}\gamma x) \right| \leq \|g\|_\infty \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-(\delta(\Gamma) + \varepsilon)d(x, \gamma y)} \leq \|g\|_\infty P_{\delta(\Gamma) + \varepsilon}(x, y) \leq \|g\|_\infty P_{\delta(\Gamma) + \varepsilon}(\mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

according to [Lemma 4.3.3](#). Hence

$$\|B(\cdot, g)\|_{L^1(\mathbb{Y}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{Y})} = \sup_{x, y \in G} \left| \sum_{\gamma \in \Gamma} (\mu^{-1}g)(y^{-1}\gamma x) \right| \leq C \|g\|_\infty. \quad (4.18)$$

We conclude by standard interpolations between (4.17) and (4.18). \square

We prove now our main result.

Proof of [Theorem 4.1.2](#). We split up the proof into two parts, depending whether the time t is small or large.

Dispersive estimate for small time. Assume that $0 < |t| < 1$. On the one hand, by using the [Lemma 4.3.4](#) with $g(x) = \mu(x)\omega_t^{\sigma,0}(x)$, we have

$$\|\cdot * \omega_t^{\sigma,0}\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \leq C_q \left(\int_G dx \varphi_0(x) \mu(x)^{\frac{q}{2}-1} |\omega_t^{\sigma,0}(x)|^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{2}{q}}.$$

Notice that the ground spherical function φ_0 , the weight μ and the kernel $\omega_t^{\sigma,0}$ are all K -bi-invariant. By using the expression (4.6) of the Haar measure in the Cartan decomposition, together with the estimate (4.7), we obtain first

$$\int_G dx \varphi_0(x) \mu(x)^{\frac{q}{2}-1} |\omega_t^{\sigma,0}(x)|^{\frac{q}{2}} \lesssim \int_0^{+\infty} dr \varphi_0(r) \mu(r)^{\frac{q}{2}-1} |\omega_t^{\sigma,0}(r)|^{\frac{q}{2}} e^{2\rho r}.$$

As $|\omega_t^{\sigma,0}(r)| \lesssim \varphi_0(r)$, according to [Theorem 4.2.1](#), and $\varphi_0(r) \asymp (1+r)e^{-\rho r}$, we obtain next

$$\int_0^{+\infty} dr \varphi_0(r) \mu(r)^{\frac{q}{2}-1} |\omega_t^{\sigma,0}(r)|^{\frac{q}{2}} e^{2\rho r} \lesssim \int_0^{+\infty} dr (1+r)^{\frac{q}{2}+1} e^{-(\frac{q}{2}-1)(\rho-\delta(\Gamma)-\varepsilon)r}$$

Since $\rho - \delta(\Gamma) - \varepsilon > 0$, the last integral is finite for any $2 < q < +\infty$. By using [Lemma 4.3.4](#), we conclude that

$$\sup_{0 < |t| < 1} \|\cdot * \omega_t^{\sigma,0}\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} < +\infty.$$

On the other hand, consider the analytic family of operators $\widetilde{W}_t^{\sigma,\infty}$ defined by (4.10). When $\operatorname{Re} \sigma = 0$, the spectral theorem yields

$$\left\| \widetilde{W}_t^{\sigma,\infty} \right\|_{L^2(\mathbb{Y}) \rightarrow L^2(\mathbb{Y})} \lesssim \|e^{it\mathbf{D}}\|_{L^2(\mathbb{Y}) \rightarrow L^2(\mathbb{Y})} = 1, \quad (4.19)$$

for all $t \in \mathbb{R}^*$. When $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$, [Theorem 4.2.1](#) yields

$$\left\| \widetilde{W}_t^{\sigma,\infty} \right\|_{L^1(\mathbb{Y}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{Y})} = \sup_{x,y \in \mathbb{Y}} \left\| \widehat{\omega}_t^\sigma(x,y) \right\| \lesssim \|\mu \widetilde{\omega}_t^\sigma(x,y)\|_\infty \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}}$$

in dimension $d \geq 3$. By applying Stein's interpolation theorem for an analytic family of operators, we obtain

$$\left\| \widetilde{W}_t^{\frac{d+1}{2}(1-\theta),\infty} \right\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)},$$

where $\theta = \frac{2}{q}$, that is

$$\|\cdot * \widetilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})},$$

with $\sigma = (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. In conclusion,

$$\left\| \widehat{W}_t^\sigma \right\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \quad \forall 0 < |t| < 1$$

for $d \geq 3$, $\sigma = (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ and $2 < q < \infty$. In dimension $d = 2$, the same arguments yield

$$\left\| \widehat{W}_t^\sigma \right\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} (1 - \log |t|)^{1-\frac{2}{q}} \quad \forall 0 < |t| < 1$$

for $\sigma = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ and $2 < q < +\infty$.

Dispersive estimate for large time. Assume now that $|t| \geq 1$. We proceed as before after splitting up the kernel as follows :

$$\omega_t^\sigma = \mathbb{1}_{B(0, \frac{|t|}{2})} \omega_t^{\sigma,0} + \mathbb{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, \frac{|t|}{2})} \omega_t^{\sigma,0} + \omega_t^{\sigma,\infty}.$$

By using [Lemma 4.3.4](#) and [Theorem 4.2.1](#), we obtain

$$\begin{aligned} \left\| \cdot * \mathbb{1}_{B(0, \frac{|t|}{2})} \omega_t^{\sigma,0} \right\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} &\lesssim \left\{ \int_0^{\frac{|t|}{2}} dr \varphi_0(r) \mu(r)^{\frac{q}{2}-1} |\omega_t^{\sigma,0}(r)|^{\frac{q}{2}} e^{2\rho r} \right\}^{\frac{2}{q}} \\ &\lesssim |t|^{-\frac{3}{2}} \underbrace{\left\{ \int_0^{\frac{|t|}{2}} dr (1+r)^{1+q} e^{-(\frac{q}{2}-1)(\rho-\delta(\Gamma)-\varepsilon)r} \right\}^{\frac{2}{q}}}_{<+\infty} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \left\| f * \mathbb{1}_{\mathbb{X} \setminus B(0, \frac{|t|}{2})} \omega_t^{\sigma,0} \right\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} &\lesssim \left\{ \int_{\frac{|t|}{2}}^{+\infty} dr \varphi_0(r) \mu(r)^{\frac{q}{2}-1} |\omega_t^{\sigma,0}(r)|^{\frac{q}{2}} e^{2\rho r} \right\}^{\frac{2}{q}} \\ &\lesssim \left\{ \int_{\frac{|t|}{2}}^{+\infty} dr (1+r)^{\frac{q}{2}+1} e^{-(\frac{q}{2}-1)(\rho-\delta(\Gamma)-\varepsilon)r} \right\}^{\frac{2}{q}}, \end{aligned}$$

which is $O(|t|^{-N})$, for any $N > 0$. Instead of $\omega_t^{\sigma,\infty}$, we consider again the kernel $\widetilde{\omega}_t^{\sigma,\infty}$. By [Theorem 4.2.1](#), the associated operators satisfy

$$\left\| \widetilde{W}_t^{\sigma,\infty} \right\|_{L^1(\mathbb{Y}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

when $\operatorname{Re} \sigma = \frac{d+1}{2}$. By using again Stein's interpolation theorem and by summing up these estimates, we obtain finally

$$\left\| \widehat{W}_t^\sigma \right\|_{L^{q'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-\frac{3}{2}} \quad \forall |t| \geq 1$$

for $d \geq 2$, $\sigma = (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ and $2 < q < \infty$. □

4.4 Strichartz inequality and applications

Let $\sigma \in \mathbb{R}$ and $1 < q < \infty$. Recall that the Sobolev space $H^{\sigma,q}(\mathbb{Y})$ is the image of $L^q(\mathbb{Y})$ under the operator $(-\Delta)^{-\frac{\sigma}{2}}$, equipped with the norm

$$\|f\|_{H^{\sigma,q}(\mathbb{Y})} = \|(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} f\|_{L^q(\mathbb{Y})}.$$

If $\sigma = N$ is a nonnegative integer, then $H^{\sigma,q}(\mathbb{Y})$ coincides with the classical Sobolev space

$$W^{N,q}(\mathbb{Y}) = \{f \in L^q(\mathbb{Y}) \mid \nabla^j f \in L^q(\mathbb{Y}), \forall 1 \leq j \leq N\},$$

defined by means of covariant derivatives. The following Sobolev embedding theorem is used in next subsection.

Theorem 4.4.1. *Let $1 < q_1, q_2 < \infty$ and $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ such that $\sigma_1 - \sigma_2 \geq \frac{d}{q_1} - \frac{d}{q_2} \geq 0$. Then*

$$H^{\sigma_1, q_1}(\mathbb{Y}) \subset H^{\sigma_2, q_2}(\mathbb{Y}). \tag{4.20}$$

We refer to [\[Tri92\]](#) for more details about function spaces on Riemannian manifolds. Let us state next the Strichartz estimate and some applications. The proofs are straightforwardly adapted from [\[AnPi14\]](#) and are therefore omitted.

4.4.1 Strichartz inequality

Recall the linear inhomogeneous Klein-Gordon equation on \mathbb{Y} :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \mathbf{D}_x^2 u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (4.21)$$

whose solution is given by Duhamel's formula :

$$u(t, x) = (\cos t \mathbf{D}_x) u_0(x) + \frac{\sin t \mathbf{D}_x}{\mathbf{D}_x} u_1(x) + \int_0^t \frac{\sin(t-s) \mathbf{D}_x}{\mathbf{D}_x} F(s, x) ds.$$

We consider first the case $d \geq 4$ and discuss the 2-dimensional and 3-dimensional cases in the final remarks. Recall that a couple (p, q) is called admissible if $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ belongs to the triangle

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} \geq \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{d-1} \right) \right\}.$$

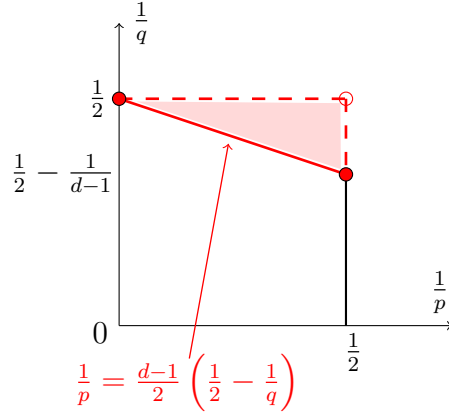


FIGURE 4.2 – Admissibility in dimension $d \geq 4$.

Theorem 4.4.2. *Let (p, q) and (\tilde{p}, \tilde{q}) be two admissible couples, and let*

$$\sigma \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma} \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right).$$

Then all solutions u to the Cauchy problem (4.21) satisfy the following Strichartz estimate :

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{Y}} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{Y}))} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{Y})} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{Y})} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}(\mathbb{Y}))}. \quad (4.22)$$

Remark 4.4.3. *In comparison with hyperbolic spaces, observe that we loose the right edge of the admissible triangle. The reason is that the standard TT^* method used to prove the Strichartz estimate breaks down in the critical case where $p = 2$ and $q < 2 \frac{d-1}{d-3}$. The dyadic decomposition method carried out in [KeTa98] takes care of the endpoints, but it requires a stronger dispersive property than Theorem 4.1.2 in small time, which reads*

$$\left\| \widehat{W}_t^\sigma \right\|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbb{Y}) \rightarrow L^q(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-(d-1) \max(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \quad \forall 0 < |t| < 1$$

for $n \geq 3$, $2 < q, \tilde{q} < \infty$ and $\sigma \geq (d+1) \max(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Such an estimate would follow from

$$\left\| \widehat{\omega}_t^\sigma \right\|_{L^q(\mathbb{Y})} \lesssim |t|^{-\frac{d-1}{2}} \quad \forall 0 < |t| < 1$$

for $\sigma \geq \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$ and $2 < q < +\infty$, which is unknown so far. However, these critical points are not relevant for the following well-posedness problems, hence we obtain the same results as on real hyperbolic spaces.

The admissible range in (4.22) can be widened by using the Sobolev embedding theorem.

Corollary 4.4.4. *Let (p, q) and (\tilde{p}, \tilde{q}) be two couples corresponding to the square*

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{d-1}\right) \right\},$$

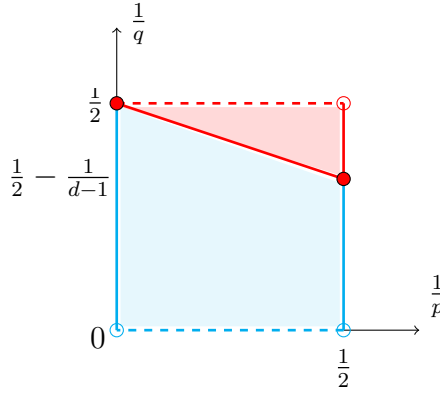


FIGURE 4.3 – Extended admissibility in dimension $d \geq 4$.

Let $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{R}$ such that $\sigma \geq \sigma(p, q)$, where

$$\sigma(p, q) = \frac{d+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) + \max \left\{ 0, \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} \right\},$$

and similarly $\tilde{\sigma} \geq \sigma(\tilde{p}, \tilde{q})$. Then the Strichartz estimate (4.22) holds for all solutions to the Cauchy problem (4.21).

Remark 4.4.5. *Theorem 4.4.2 and Corollary 4.4.4 still hold true in lower dimension $d = 3$ and $d = 2$ with similar proofs. In particular, the endpoint $(p, q) = (2, \infty)$ is excluded and the admissible set in dimension 2 becomes*

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \mid \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\},$$

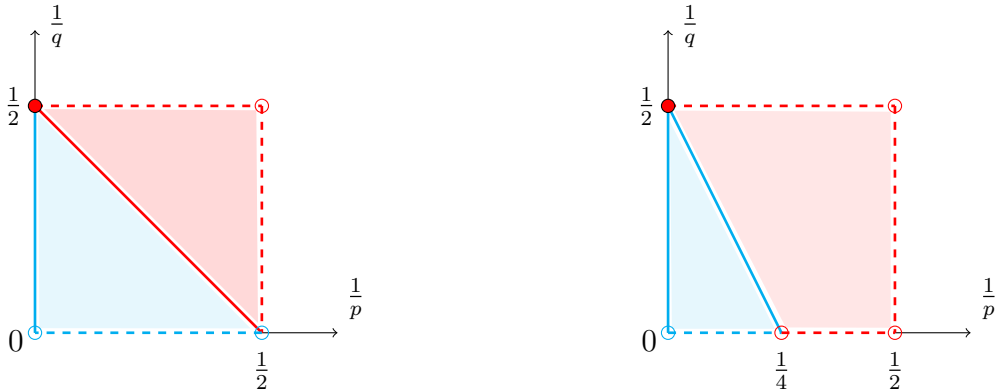


FIGURE 4.4 – Admissibility in dimension $d = 3$ and $d = 2$.

and the region in [Corollary 4.4.4](#) is

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{4} \right) \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\}.$$

4.4.2 Global well-posedness for the semilinear Klein-Gordon equation

We refer to [\[AnPi14\]](#) for more detailed proofs of the following well-posedness results. By using the classical fixed point scheme with the previous Strichartz estimates, one obtains the global well-posedness for the semilinear equation

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \mathbf{D}_x^2 u(t, x) = F_\gamma(u(t, x)), \\ u(0, x) = f(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x). \end{cases} \quad (4.23)$$

on \mathbb{Y} with power-like nonlinearities F satisfying

$$|F_\gamma(u)| \lesssim |u|^\gamma \quad \text{and} \quad |F_\gamma(u) - F_\gamma(v)| \lesssim (|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1})|u - v| \quad \forall \gamma > 1,$$

and small initial data u_0 and u_1 . Assume that $d \geq 3$, and consider the following powers

$$\gamma_1 = 1 + \frac{3}{d}, \quad \gamma_2 = 1 + \frac{2}{\frac{d-1}{2} + \frac{2}{d-1}}, \quad \gamma_3 = \begin{cases} 1 + \frac{4}{d-2} & \text{if } d \leq 5, \\ \frac{d-1}{2} + \frac{3}{d+1} - \sqrt{\left(\frac{d-3}{2} + \frac{3}{d+1}\right)^2 - 4\frac{d-1}{d+1}} & \text{if } d \geq 6, \end{cases}$$

and the following curves

$$\sigma_1(\gamma) = \frac{d+1}{4} - \frac{(d+1)(d+5)}{8d} \frac{1}{\gamma - \frac{d+1}{2d}}, \quad \sigma_2(\gamma) = \frac{d+1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad \sigma_3(\gamma) = \frac{d}{2} - \frac{2}{\gamma-1}.$$

In dimension $d \geq 3$, the equation [\(4.23\)](#) is globally well-posed for small initial data in $H^\sigma(\mathbb{Y}) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{Y})$ provided that

$$\begin{cases} \sigma > 0 & \text{if } 1 < \gamma \leq \gamma_1, \\ \sigma \geq \sigma_1(\gamma) & \text{if } \gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2, \\ \sigma \geq \sigma_2(\gamma) & \text{if } \gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_c(d), \\ \sigma \geq \sigma_3(\gamma) & \text{if } \gamma_c(d) \leq \gamma \leq \gamma_3. \end{cases} \quad (4.24)$$

Similar results hold in dimension 2, see [\[AnPi14\]](#). Observe that one obtains the same global well-posedness results on \mathbb{Y} as on real hyperbolic spaces, without further assumptions. In comparison with the Euclidean setting, this is a consequence of the larger admissible set for the Strichartz estimate.

Chapitre 5

Bottom of the L^2 spectrum of the Laplacian on locally symmetric spaces

Ce chapitre reprend l'article [AnZh20a] écrit en commun avec Jean-Philippe Anker et soumis à la revue.

Résumé : *Nous estimons le bas du L^2 spectre du laplacien sur les espaces localement symétriques en termes des exposants critiques des séries de Poincaré convenables. Notre résultat principal est un analogue en rang supérieur de la caractérisation établie par Elstrodt, Patterson, Sullivan and Corlette en rang un. Il améliore les résultats précédents obtenus par Leuzinger et Weber en rang supérieur.*

This chapter resumes the article [AnZh20a] written in collaboration with Jean-Philippe Anker and submitted to the journal.

Abstract : *We estimate the bottom of the L^2 spectrum of the Laplacian on locally symmetric spaces in terms of the critical exponents of appropriate Poincaré series. Our main result is the higher rank analog of a characterization due to Elstrodt, Patterson, Sullivan and Corlette in rank one. It improves upon previous results obtained by Leuzinger and Weber in higher rank.*

Summary

5.1	Introduction	88
5.2	First improvement	89
5.3	Second improvement	94
5.4	Further results about heat kernel bounds	94

5.1 Introduction

We adopt the standard notation and refer to [Hel78; Hel00] for more details. Let G be a semi-simple Lie group, connected, noncompact, with finite center, and K be a maximal compact subgroup of G . The homogeneous space $\mathbb{X} = G/K$ is a Riemannian symmetric space of noncompact type. Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ be the Cartan decomposition of the Lie algebra of G . Fix a maximal abelian subspace \mathfrak{a} in \mathfrak{p} . Let Γ be a discrete torsion-free subgroup of G that acts freely and properly discontinuously on \mathbb{X} . Then $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ is a locally symmetric space, whose Riemannian structure is inherited from \mathbb{X} . We denote by n the joint dimension of \mathbb{X} and \mathbb{Y} , and by ℓ the joint rank of \mathbb{X} and \mathbb{Y} , which is the dimension of \mathfrak{a} . Let $\Sigma \subset \mathfrak{a}$ be the root system of $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ and let W be the associated Weyl group. Choose a positive Weyl chamber $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ and let $\Sigma^+ \subset \Sigma$ be the corresponding subsystem of positive roots. Denote by $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha$ the half sum of positive roots counted with their multiplicities. Occasionally we shall need the reduced root system $\Sigma_r = \{\alpha \in \Sigma \mid \frac{\alpha}{2} \notin \Sigma\}$.

Consider the classical Poincaré series

$$P_s(xK, yK) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(xK, \gamma yK)} \quad \forall s > 0, \forall x, y \in G \quad (5.1)$$

and denote by $\delta(\Gamma) = \inf\{s > 0 \mid P_s(xK, yK) < +\infty\}$ its critical exponent. Recall that $\delta(\Gamma) \in [0, 2|\rho|]$ may be also defined by

$$\delta(\Gamma) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log N_R(xK, yK)}{R} \quad \forall x, y \in G,$$

where $N_R(xK, yK) = |\{\gamma \in \Gamma \mid d(xK, \gamma yK) \leq R\}|$ denotes the orbital counting function. Finally, let $\Delta_{\mathbb{Y}}$ be the Laplace-Beltrami operator on \mathbb{Y} and let $\lambda_0(\mathbb{Y})$ be the bottom of the L^2 spectrum of $-\Delta_{\mathbb{Y}}$. The following celebrated result, due to Elstrodt [Els73a; Els73b; Els74], Patterson [Pat76], Sullivan [Sul87] and Corlette [Cor90], expresses $\lambda_0(\mathbb{Y})$ in terms of ρ and $\delta(\Gamma)$ in rank one.

Theorem 5.1.1. *In the rank one case, we have*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) = \begin{cases} |\rho|^2 & \text{if } 0 \leq \delta(\Gamma) \leq |\rho|, \\ |\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - |\rho|)^2 & \text{if } |\rho| \leq \delta(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases} \quad (5.2)$$

This result was extended in higher rank as follows by Leuzinger [Leu04] and Weber [Web08]. Let $\rho_{\min} = \min_{H \in \overline{\mathfrak{a}^+}, |H|=1} \langle \rho, H \rangle \in (0, |\rho|]$.

Theorem 5.1.2. *In the general case, the following estimates hold :*

- *Upper bound :*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) \leq \begin{cases} |\rho|^2 & \text{if } 0 \leq \delta(\Gamma) \leq |\rho|, \\ |\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - |\rho|)^2 & \text{if } |\rho| \leq \delta(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases}$$

- *Lower bound :*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) \geq \begin{cases} |\rho|^2 & \text{if } 0 \leq \delta(\Gamma) \leq \rho_{\min}, \\ \max\{0, |\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - \rho_{\min})^2\} & \text{if } \rho_{\min} \leq \delta(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases}$$

In other terms,

$$\begin{cases} \lambda_0(\mathbb{Y}) = |\rho|^2 & \text{if } \delta(\Gamma) \in [0, \rho_{\min}], \\ \lambda_0(\mathbb{Y}) \in [|\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - \rho_{\min})^2, |\rho|^2] & \text{if } \delta(\Gamma) \in [\rho_{\min}, |\rho|], \\ \lambda_0(\mathbb{Y}) \in [|\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - \rho_{\min})^2, |\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - |\rho|)^2] & \text{if } \delta(\Gamma) \in [|\rho|, |\rho| + \rho_{\min}], \\ \lambda_0(\mathbb{Y}) \in [0, |\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - |\rho|)^2] & \text{if } \delta(\Gamma) \in [|\rho| + \rho_{\min}, 2|\rho|]. \end{cases}$$

Notice that $\rho_{\min} = |\rho|$ in rank one and thus [Theorem 5.1.2](#) reduces [Theorem 5.1.1](#).

In this paper, we sharpen [Theorem 5.1.2](#) by considering appropriate Poincaré series. We first improve in [Theorem 5.2.9](#) the lower bound of $\lambda_0(\mathbb{Y})$ by a slight modification of the classical Poincaré series (5.1). We obtain next in [Theorem 5.3.1](#) the proper analog of [Theorem 5.1.1](#) by considering a more involved family of Poincaré series. In the last section, we use these results to restate the existing heat kernel bounds on \mathbb{Y} [[Web08](#)].

5.2 First improvement

In this section, we replace the Riemannian distance $d(\cdot, \cdot)$ on \mathbb{X} by a polyhedral distance $d'(\cdot, \cdot)$, which reflects the volume growth at infinity and which was already used by the first author in [[Ank90](#); [Ank91](#); [Ank92](#)]. Specifically, let

$$d'(xK, yK) = \langle \frac{\rho}{|\rho|}, (y^{-1}x)^+ \rangle \quad \forall x, y \in G, \quad (5.3)$$

where $(y^{-1}x)^+$ denotes the $\overline{\mathfrak{a}^+}$ -component of $y^{-1}x$ in the Cartan decomposition $G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}^+})K$.

Proposition 5.2.1. *$d'(\cdot, \cdot)$ is a G -invariant distance on \mathbb{X} .*

Proof. The G -invariance of d' is straightforward from the definition (5.3). The symmetry

$$d'(xK, yK) = d'(yK, xK)$$

follows from

$$(y^{-1})^+ = -w_0 \cdot y^+ \quad \text{and} \quad -w_0 \cdot \rho = \rho, \quad (5.4)$$

where w_0 denotes the longest element in the Weyl group. Let us check the triangular inequality

$$d'(xK, yK) \leq d'(xK, zK) + d'(zK, yK).$$

By G -invariance, we may reduce to the case where $zK = eK$. According to [Lemma 5.2.2](#) below,

$$x^+ + (y^{-1})^+ - (y^{-1}x)^+$$

belongs to the cone generated by the positive roots. □

Lemma 5.2.2. *For every $x, y \in G$, we have the following inclusion*

$$\text{co}[W \cdot (xy)^+] \subset \text{co}[W \cdot (x^+ + y^+)] \quad (5.5)$$

between convex hulls.

Proof. The inclusion (5.5) amounts to the fact that

$$x^+ + y^+ - (xy)^+$$

belongs to the cone generated by the positive roots or, equivalently, to the inequality

$$\langle \lambda, (xy)^+ \rangle \leq \langle \lambda, x^+ \rangle + \langle \lambda, y^+ \rangle \quad \forall \lambda \in \overline{\mathfrak{a}^+}. \quad (5.6)$$

It is enough to prove (5.6) for all highest weights λ of irreducible finite-dimensional complex representations $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ with K -fixed vectors. As usual, consider an inner product on V such that

$$\begin{cases} \pi(k) \text{ is unitary} & \forall k \in K, \\ \pi(a) \text{ is self-adjoint} & \forall a \in \exp \mathfrak{a}. \end{cases}$$

Then

$$e^{\langle \lambda, (xy)^+ \rangle} = \|\pi(xy)\| \leq \|\pi(x)\| \|\pi(y)\| = e^{\langle \lambda, x^+ \rangle} e^{\langle \lambda, y^+ \rangle} = e^{\langle \lambda, x^+ + y^+ \rangle}.$$

□

Remark 5.2.3. *The distance d' is comparable to the Riemannian distance d . Specifically,*

$$\frac{\rho_{\min}}{|\rho|} d(xK, yK) \leq d'(xK, yK) \leq d(xK, yK) \quad \forall x, y \in G. \quad (5.7)$$

This follows indeed from

$$\frac{\rho_{\min}}{|\rho|} |H| \leq \langle \frac{\rho}{|\rho|}, H \rangle \leq |H| \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

The volume of balls

$$B'_r(xK) = \{yK \in X \mid d'(yK, xK) \leq r\}$$

was determined in [Ank90, Lemma 6]. For the reader's convenience, we recall the statement and its proof.

Lemma 5.2.4. *For every $x \in G$ and $r > 0$, we have*

$$|B'_r(xK)| \asymp \begin{cases} r^{n-1} & \text{if } r \text{ is small,} \\ r^{\ell-1} e^{2|\rho|r} & \text{if } r \text{ is large.} \end{cases}$$

Remark 5.2.5. *Notice the different large scale behavior, in comparison with the classical ball volume*

$$|B_r(xK)| \asymp \begin{cases} r^{n-1} & \text{if } r \text{ is small,} \\ r^{\frac{\ell-1}{2}} e^{2|\rho|r} & \text{if } r \text{ is large.} \end{cases}$$

(see for instance [Stro81] or [Kni97]).

Proof. By translation invariance, we may assume that $x = e$. Recall the integration formula

$$\int_{\mathbb{X}} dx f(x) = \text{const.} \int_K dk \int_{\mathfrak{a}^+} dH \omega(H) f(k(\exp H)K), \quad (5.8)$$

in the Cartan decomposition, with density

$$\omega(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\sinh \langle \alpha, H \rangle)^{m_\alpha} \asymp \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left(\frac{\langle \alpha, H \rangle}{1 + \langle \alpha, H \rangle} \right)^{m_\alpha} e^{2\langle \rho, H \rangle}.$$

Thus

$$|B'_r(eK)| \asymp \int_{\{H \in \mathfrak{a}^+ \mid |H| \leq r\}} dH \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \alpha, H \rangle^{m_\alpha} \asymp r^n$$

if r is small. Let us turn to r large. On the one hand, we estimate from above

$$|B'_r(eK)| \lesssim \int_{\{H \in \mathfrak{a}^+ \mid \langle \rho, H \rangle \leq |\rho|r\}} dH e^{2\langle \rho, H \rangle} \asymp \int_0^{2|\rho|r} ds s^{\ell-1} e^s \asymp r^{\ell-1} e^{2|\rho|r}.$$

On the other hand, let $H_0 \in \mathfrak{a}^+$. As

$$\omega(H) \asymp e^{2\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in H_0 + \overline{\mathfrak{a}^+},$$

we estimate from below

$$|B'_r(eK)| \gtrsim \int_{\{H \in H_0 + \mathfrak{a}^+ \mid \langle \rho, H \rangle \leq |\rho|r\}} dH e^{2\langle \rho, H \rangle} \gtrsim \int_{C_0}^{2|\rho|r} ds s^{\ell-1} e^s \asymp r^{\ell-1} e^{2|\rho|r},$$

where $C_0 > 0$ is a constant depending on H_0 . □

Consider now the modified Poincaré series

$$P'_s(xK, yK) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd'(xK, \gamma yK)} \quad \forall s > 0, \forall x, y \in G \quad (5.9)$$

associated with d' , its critical exponent

$$\delta'(\Gamma) = \inf\{s > 0 \mid P'_s(xK, yK) < +\infty\} \quad (5.10)$$

and the modified orbital counting function

$$N'_R(xK, yK) = |\{\gamma \in \Gamma \mid d'(xK, \gamma yK) \leq R\}| \quad \forall R \geq 0, \forall x, y \in G. \quad (5.11)$$

The following proposition shows that (5.9), (5.10) and (5.11) share the properties of their classical counterparts.

Proposition 5.2.6. *The following assertions hold :*

- (i) $\delta'(\Gamma)$ does not depend on the choice of x and y .
- (ii) $0 \leq \delta'(\Gamma) \leq 2|\rho|$.
- (iii) For every $x, y \in G$,

$$\delta'(\Gamma) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log N'_R(xK, yK)}{R}. \quad (5.12)$$

Remark 5.2.7. *It follows from (5.7) that*

$$P_s(xK, yK) \leq P'_s(xK, yK) \leq P_{\frac{\rho_{\min}}{|\rho|}s}(xK, yK)$$

and

$$N_R(xK, yK) \leq N'_R(xK, yK) \leq N_{\frac{|\rho|}{\rho_{\min}}R}(xK, yK).$$

Hence

$$0 \leq \delta(\Gamma) \leq \delta'(\Gamma) \leq \frac{|\rho|}{\rho_{\min}} \delta(\Gamma).$$

Proof. (i) follows from the triangular inequality. More precisely, let $x_1, y_1, x_2, y_2 \in G$ and $s > 0$. Then

$$d'(x_2K, \gamma y_2K) \leq d'(x_2K, x_1K) + d'(x_1K, \gamma y_1K) + d'(\gamma y_1K, \gamma y_2K) \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

hence

$$\underbrace{\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s d'(x_1K, \gamma y_1K)}}_{P'_s(x_1K, y_1K)} \leq e^{s\{d'(x_1K, x_2K) + d'(y_1K, y_2K)\}} \underbrace{\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s d'(x_2K, \gamma y_2K)}}_{P'_s(x_2K, y_2K)}.$$

(ii) Let us show that $P'_s(eK, eK) < +\infty$ for every $s > 2|\rho|$. According to Lemma 5.2.8 below, there exists $r > 0$ such that the balls $B'_r(\gamma K)$, with $\gamma \in \Gamma$, are pairwise disjoint in G/K . Let us apply the integration formula (5.8) to the function

$$f(xK) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd'(xK, eK)} \mathbf{1}_{B'_r(\gamma K)}(xK).$$

On the one hand, as

$$|d'(xK, eK) - d'(\gamma K, eK)| \leq r \quad \forall xK \in B'_r(\gamma K),$$

we have

$$\int_{\mathbb{X}} d(xK) f(xK) \asymp \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd'(\gamma K, eK)} \frac{|B'_r(\gamma K)|}{|B'_r(eK)|} \asymp P'_s(eK, eK).$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}} d(xK) f(xK) &\leq \int_{\mathbb{X}} d(xK) e^{-sd'(xK, eK)} \\ &\asymp \int_{\mathfrak{a}^+} dH \omega(H) e^{-s\langle \frac{\rho}{|\rho|}, H \rangle} \lesssim \int_{\mathfrak{a}^+} dH e^{-\langle \frac{s}{|\rho|} - 2 \rangle \langle \rho, H \rangle} \end{aligned}$$

is finite if $s > 2|\rho|$. Thus $P'_s(eK, eK) < +\infty$ and consequently $\delta'(\Gamma) \leq 2|\rho|$.

(iii) Denote the right hand side of (5.12) by $L(xK, yK)$ and let us first show that $L(xK, yK)$ is finite. By applying Lemma 5.2.8 below to $y^{-1}\Gamma y$, we deduce that there exists $r > 0$ such that the balls $B'_r(\gamma yK)$, with $\gamma \in \Gamma$, are pairwise disjoint. Set

$$\Gamma'_R(xK, yK) = \{\gamma \in \Gamma \mid d'(xK, \gamma yK) \leq R\} \quad \forall R \geq 0, \forall x, y \in G.$$

Then the ball $B'_{R+r}(xK)$ contains the disjoint balls $B'_r(\gamma yK)$, with $\gamma \in \Gamma'_R(xK, yK)$. By computing volumes, we estimate

$$N'_R(xK, yK) = |\Gamma'_R(xK, yK)| \leq \frac{|B'_{R+r}(xK)|}{|B'_r(eK)|} \asymp (1+R)^{\ell-1} e^{2|\rho|R}.$$

Hence $L(xK, yK) \leq 2|\rho|$. Let us next show that $L(xK, yK)$ is actually independent of $x, y \in G$. Given $x_1, y_1, x_2, y_2 \in G$ and $R_1 > 0$, let

$$R_2 = R_1 + d'(x_1K, x_2K) + d'(y_1K, y_2K).$$

Then the triangular inequality

$$d'(x_2K, \gamma y_2K) \leq d'(x_2K, x_1K) + d'(x_1K, \gamma y_1K) + d'(\gamma y_1K, \gamma y_2K)$$

implies successively

$$\begin{aligned} \Gamma'_{R_1}(x_1K, y_1K) &\subset \Gamma'_{R_2}(x_2K, y_2K), \\ N'_{R_1}(x_1K, y_1K) &\leq N'_{R_2}(x_2K, y_2K), \\ L(x_1K, y_1K) &\leq L(x_2K, y_2K). \end{aligned}$$

Let us finally prove the equality between $\delta'(\Gamma)$ and $L = L(eK, eK)$. For this purpose, observe that

$$\begin{aligned} P'_s &= 1 + \sum_{R \in \mathbb{N}^*} \sum_{\gamma \in \Gamma'_R \setminus \Gamma'_{R-1}} e^{-sd'(eK, \gamma K)} \\ &\asymp 1 + \sum_{R \in \mathbb{N}^*} (N'_R - N'_{R-1}) e^{-sR} \\ &\asymp \sum_{R \in \mathbb{N}} N'_R e^{-sR}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

where we have written for simplicity

$$P'_s = P'_s(eK, eK), \quad \Gamma'_R = \Gamma'_R(eK, eK) \quad \text{and} \quad N'_R = N'_R(eK, eK).$$

One the one hand, let $s > L$ and set $\varepsilon = \frac{s-L}{2}$. By definition of L ,

$$N'_R \lesssim e^{(L+\varepsilon)R} \quad \forall R \geq 0.$$

Hence

$$P'_s \lesssim \sum_{R \in \mathbb{N}} e^{-\varepsilon R} < +\infty.$$

One the other hand, let $s < L$. By definition of L , there exists a sequence of integers $1 < R_1 < R_2 < \dots \rightarrow +\infty$ such that

$$N'_{R_j} \geq e^{sR_j} \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Hence the series (5.13) diverges. \square

Lemma 5.2.8. *There exists $r > 0$ such that the balls $B'_r(\gamma K)$, with $\gamma \in \Gamma$, are pairwise disjoint in G/K .*

Proof. Let $r > 0$. As Γ is discrete in G , its intersection with the compact subset

$$G'_r = \{y \in G \mid d'(yK, eK) \leq r\} = K(\exp\{H \in \overline{\mathfrak{a}^+} \mid \langle \rho, H \rangle \leq |\rho|r\})K$$

is finite. Moreover, as Γ is torsion-free,

$$\gamma^+ \neq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{e\}.$$

Hence there exists $r > 0$ such that $\Gamma \cap G'_{2r} = \{e\}$, which implies that the sets $\gamma G'_r$ are pairwise disjoint in G . In other words, the balls $B'_r(\gamma K)$ are pairwise disjoint in G/K . \square

By using $\delta'(\Gamma)$, we now improve the lower bound in [Theorem 5.1.2](#).

Theorem 5.2.9. *The following lower bound holds for the bottom $\lambda_0(\mathbb{Y})$ of the L^2 spectrum of $-\Delta_{\mathbb{Y}}$ on $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$:*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) \geq \begin{cases} |\rho|^2 & \text{if } 0 \leq \delta'(\Gamma) \leq |\rho|, \\ |\rho|^2 - (\delta'(\Gamma) - |\rho|)^2 & \text{if } |\rho| \leq \delta'(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases}$$

Next statement is obtained by combining this lower bound with the upper bound in [Theorem 5.1.2](#).

Corollary 5.2.10. *The following estimates hold for $\lambda_0(\mathbb{Y})$:*

$$\begin{cases} \lambda_0(\mathbb{Y}) = |\rho|^2 & \text{if } \delta'(\Gamma) \leq |\rho|, \\ |\rho|^2 - (\delta'(\Gamma) - |\rho|)^2 \leq \lambda_0(\mathbb{Y}) \leq |\rho|^2 & \text{if } \delta(\Gamma) \leq |\rho| \leq \delta'(\Gamma), \\ |\rho|^2 - (\delta'(\Gamma) - |\rho|)^2 \leq \lambda_0(\mathbb{Y}) \leq |\rho|^2 - (\delta(\Gamma) - |\rho|)^2 & \text{if } |\rho| \leq \delta(\Gamma). \end{cases}$$

Proof of [Theorem 5.2.9](#) and [Corollary 5.2.10](#). Let us resume the approach in [[Cor90](#), Section 4] and [[Leu04](#), Section 3]. It consists in studying the convergence of the positive series

$$g_{\zeta}^{\Gamma}(\Gamma xK, \Gamma yK) = \sum_{\gamma \in \Gamma} g_{\zeta}(Ky^{-1}\gamma^{-1}xK), \quad (5.14)$$

which expresses the kernel g_{ζ}^{Γ} of $(-\Delta_{\mathbb{Y}} - |\rho|^2 + \zeta^2)^{-1}$ on the locally symmetric space $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ in terms of the corresponding Green function g_{ζ} on the symmetric space $\mathbb{X} = G/K$. Here $\zeta > 0$ and $\Gamma xK \neq \Gamma yK$. Recall [[AnJi99](#), Theorem 4.2.2] that

$$g_{\zeta}(\exp H) \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} (1 + \langle \alpha, H \rangle) \right\} |H|^{-\frac{\ell-1}{2} - |\Sigma_r^+|} e^{-\langle \rho, H \rangle - \zeta|H|} \quad (5.15)$$

for $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ large, let say $|H| \geq \frac{1}{2}$, while

$$g_{\zeta}(\exp H) \asymp \begin{cases} |H|^{-(n-2)} & \text{if } n > 2 \\ \log \frac{1}{|H|} & \text{if } n = 2 \end{cases}$$

for H small, let say $0 < |H| \leq \frac{1}{2}$. Thus (5.14) converges if and only if

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma_r^+} (1 + \langle \alpha, (y^{-1}\gamma^{-1}x)^+ \rangle) \right\} d(xK, \gamma yK)^{-\frac{\ell-1}{2} - |\Sigma_r^+|} e^{-|\rho|d'(xK, \gamma yK) - \zeta d(xK, \gamma yK)} \quad (5.16)$$

converges. Let us compare the series (5.16) with the Poincaré series (5.1) and (5.9). On the one hand, as $|(y^{-1}\gamma^{-1}x)^+| = d(xK, \gamma yK)$, (5.16) is bounded from above by $P'_{|\rho|+\zeta}(xK, yK)$. On the other hand, as

$$d(xK, \gamma yK)^{-\frac{\ell-1}{2} - |\Sigma_r^+|} \gtrsim e^{-\varepsilon d(xK, \gamma yK)}$$

for every $\varepsilon > 0$, (5.16) is bounded from below by $P_{|\rho|+\zeta+\varepsilon}(xK, yK)$. Hence (5.16) converges if $|\rho| + \zeta > \delta'(\Gamma)$, i.e., $\zeta > \delta'(\Gamma) - |\rho|$, while (5.16) diverges if $\zeta < \delta(\Gamma) - |\rho|$. We conclude by using the fact [[Cor90](#), Section 4] that $\lambda_0(\mathbb{Y})$ is the supremum of $|\rho|^2 - \zeta^2$ over all $\zeta > 0$ such that (5.14) converges. \square

5.3 Second improvement

In this section, we obtain the proper higher rank analog of [Theorem 5.1.1](#) by considering a further family of distances on \mathbb{X} , which reflects the large scale behavior [\(5.15\)](#) of the Green function. Specifically, for every $s > 0$ and $x, y \in G$, let

$$\begin{aligned} d_s(xK, yK) &= \min\{s, |\rho|\} d'(xK, yK) + \max\{s - |\rho|, 0\} d(xK, yK) \\ &= \begin{cases} s d'(xK, yK) & \text{if } 0 < s \leq |\rho|, \\ |\rho| d'(xK, yK) + (s - |\rho|) d(xK, yK) & \text{if } s \geq |\rho|. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Then [\(5.17\)](#) defines a G -invariant distance on \mathbb{X} such that

$$s d'(xK, yK) \leq d_s(xK, yK) \leq s d(xK, yK) \quad \forall s > 0, \forall x, y \in G. \quad (5.18)$$

Consider the associated Poincaré series

$$P_s''(xK, yK) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-d_s(xK, \gamma yK)} \quad \forall s > 0, \forall x, y \in G \quad (5.19)$$

and its critical exponent

$$\delta''(\Gamma) = \inf\{s > 0 \mid P_s''(xK, yK) < +\infty\}.$$

It follows from [\(5.18\)](#) that

$$0 \leq \delta(\Gamma) \leq \delta''(\Gamma) \leq \delta'(\Gamma) \leq 2|\rho|. \quad (5.20)$$

Theorem 5.3.1. *The following characterization holds for the bottom $\lambda_0(\mathbb{Y})$ of the L^2 spectrum of $-\Delta_{\mathbb{Y}}$ on $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$:*

$$\lambda_0(\mathbb{Y}) = \begin{cases} |\rho|^2 & \text{if } 0 \leq \delta''(\Gamma) \leq |\rho|, \\ |\rho|^2 - (\delta''(\Gamma) - |\rho|)^2 & \text{if } |\rho| \leq \delta''(\Gamma) \leq 2|\rho|. \end{cases} \quad (5.21)$$

Proof. In the proof of [Theorem 5.2.9](#) and [Corollary 5.2.10](#), we compared the series [\(5.14\)](#), or equivalently [\(5.16\)](#), with the Poincaré series [\(5.1\)](#) and [\(5.9\)](#). If we consider instead the Poincaré series [\(5.19\)](#), we obtain in the same way that [\(5.16\)](#) is bounded from above by $P_{|\rho|+\zeta}''(xK, yK)$ and from below by $P_{|\rho|+\zeta+\varepsilon}''(xK, yK)$, for every $\varepsilon > 0$. Hence [\(5.16\)](#) converges if $\zeta > \delta''(\Gamma) - |\rho|$, while [\(5.16\)](#) diverges if $\zeta < \delta''(\Gamma) - |\rho|$. We conclude as in the above-mentioned proof. \square

Remark 5.3.2. *If Γ is a lattice, i.e., $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ has finite volume, then $\lambda_0(\mathbb{Y}) = 0$ and $\delta''(\Gamma) = 2|\rho|$, hence $\delta'(\Gamma) = 2|\rho|$. Furthermore $\delta(\Gamma) = 2|\rho|$ [[Alb99](#), [Theorem 7.4](#)]. As pointed out by Corlette [[Cor90](#)] in rank one and by Leuzinger [[Leu03](#)] in higher rank, if G has Kazhdan's property (T), then the following conditions are actually equivalent :*

$$(a) \Gamma \text{ is a lattice, } (b) \lambda_0(\mathbb{Y}) = 0, \quad (c) \delta(\Gamma) = 2|\rho|, \quad (d) \delta''(\Gamma) = 2|\rho|.$$

5.4 Further results about heat kernel bounds

As for the Green function, the heat kernel

$$h_t^{\mathbb{Y}}(\Gamma xK, \Gamma yK) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_t(Ky^{-1}\gamma^{-1}xK) \quad (5.22)$$

on a locally symmetric space $\mathbb{Y} = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ can be expressed and estimated by using the heat kernel h_t on the symmetric space $\mathbb{X} = G/K$, whose behavior is well understood [[AnOs03](#)]. The following Gaussian bounds were obtained this way by Davies & Mandouvalos [[DaMa88](#)] in rank one and by Weber in higher rank [[Web08](#)].

Theorem 5.4.1. *The following estimates hold for all $t > 0$ and all $x, y \in G$:*

(i) *Assume that $\delta(\Gamma) < \rho_{\min}$ and let $\delta(\Gamma) < s < \rho_{\min}$. Then*

$$h_t^Y(\Gamma xK, \Gamma yK) \lesssim t^{-\frac{d}{2}} (1+t)^{\frac{d-D}{2}} e^{-|\rho|^2 t} e^{-\frac{d(\Gamma xK, \Gamma yK)^2}{4t}} P_s(xK, yK).$$

(ii) *Assume that $\rho_{\min} \leq \delta(\Gamma) < \rho_{\min} + |\rho|$ and let $\delta(\Gamma) - \rho_{\min} < s_1 < s_2 < |\rho|$. Then*

$$h_t^Y(\Gamma xK, \Gamma yK) \lesssim t^{-\frac{d}{2}} e^{-(|\rho|^2 - s_2^2)t} P_{\rho_{\min} + s_1}(xK, yK).$$

(iii) *Assume that $\delta(\Gamma) < \rho_{\min} + |\rho|$. Let $s > \delta(\Gamma)$ and $\varepsilon > 0$. Then*

$$h_t^Y(\Gamma xK, \Gamma yK) \lesssim t^{-\frac{d}{2}} e^{-(\lambda_0(\mathbb{Y}) - 2\varepsilon)t} e^{-\frac{d(\Gamma xK, \Gamma yK)^2}{4(1+\varepsilon)t}} \times P_s(xK, xK)^{\frac{1}{2}} P_s(yK, yK)^{\frac{1}{2}}.$$

By using [Theorem 5.3.1](#) instead of [Theorem 5.1.1](#) and [Theorem 5.1.2](#), we obtain the following alternative statement in term of $\delta''(\Gamma)$.

Theorem 5.4.2. *The following estimates hold for all $t > 0$ and all $x, y \in G$:*

(i) *Assume that $\delta''(\Gamma) < |\rho|$ and let $\delta''(\Gamma) < s < |\rho|$. Then*

$$h_t^Y(\Gamma xK, \Gamma yK) \lesssim t^{-\frac{d}{2}} (1+t)^{\frac{d-D}{2}} e^{-|\rho|^2 t} e^{-\frac{d(\Gamma xK, \Gamma yK)^2}{4t}} P_s''(xK, yK).$$

(ii) *Assume that $|\rho| \leq \delta''(\Gamma) < 2|\rho|$ and let $\delta''(\Gamma) - |\rho| < s_1 < s_2 < |\rho|$. Then*

$$h_t^Y(\Gamma xK, \Gamma yK) \lesssim t^{-\frac{d}{2}} e^{-(|\rho|^2 - s_2^2)t} P_{|\rho| + s_1}''(xK, yK).$$

(iii) *Assume that $\delta''(\Gamma) < 2|\rho|$. Let $s > \delta''(\Gamma)$ and $\varepsilon > 0$. Then*

$$h_t^Y(\Gamma xK, \Gamma yK) \lesssim t^{-\frac{d}{2}} e^{-(|\rho|^2 - (\delta''(\Gamma) - |\rho|)^2 - 2\varepsilon)t} e^{-\frac{d(\Gamma xK, \Gamma yK)^2}{4(1+\varepsilon)t}} \times P_s''(xK, xK)^{\frac{1}{2}} P_s''(yK, yK)^{\frac{1}{2}}.$$

We omit the *proof*, which is straightforwardly adapted from [\[DaMa88\]](#) and [\[Web08\]](#).

Chapitre 6

Conclusion et Perspectives

En combinant la décomposition spectrale introduite dans [Chap. 2](#) avec la paramétrix de Hadamard et la méthode de la phase stationnaire, nous avons étudié dans cette thèse l'équation des ondes sur les espaces symétriques non compacts de rang général. Il est naturel de se demander si l'équation de Schrödinger, qui est une autre équation dispersive, a des propriétés similaires sur les espaces symétriques de rang supérieur. Une autre question est de savoir comment nous pouvons étendre les résultats obtenus sur les espaces symétriques aux espaces localement symétriques.

6.1 Équation de Schrödinger sur les espaces symétriques

Un autre exemple important d'équation dispersive, qui est également issue de la physique, est celle de Schrödinger. Ses propriétés dispersives se sont avérées similaires à l'équation des ondes. L'équation de Schrödinger est l'équation de chaleur en temps imaginaire :

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Son étude a été entreprise progressivement dans divers contextes : tout d'abord dans le cadre euclidien ([[GiVe85](#) ; [Kat87](#) ; [Tsu87](#) ; [CaWe90](#) ; [KeTa98](#) ; [TVZ07](#)]), puis des tores ([[Bou93](#) ; [CKSTT10](#) ; [HTT11](#) ; [IoPa12](#)]), des variétés compactes ([[BGT04](#) ; [GePi10](#) ; [Han12](#) ; [Her13](#)]), et des espaces asymptotiquement euclidiens et des espaces asymptotiquement hyperboliques ([[BoTz07](#) ; [Bou11](#)]). Récemment, l'équation de Schrödinger est considérée sur les groupes de Lie compacts et les espaces symétriques compacts de rang général [[Zha20b](#) ; [Zha20a](#)].

Nous nous intéressons aux variétés à courbure négative où l'équation de Schrödinger est maintenant bien comprise sur les espaces hyperboliques réels [[Ban07](#) ; [BCS08](#) ; [AnPi09](#) ; [IoSt09](#)], et sur les espaces de Damek-Ricci [[APV11](#)], qui contiennent tous les espaces symétriques non compacts de rang un. On conjecture naturellement que les résultats établis en rang un s'étendent aux espaces symétriques de rang supérieur. Précisément, nous espérons que les estimations ponctuelles suivantes du noyau de Schrödinger soient valables.

Conjecture. *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que les estimations suivantes sont valables pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{X}$:*

$$|s_t(x)| \lesssim (1 + |x^+|)^N e^{-\langle \rho, x^+ \rangle} \begin{cases} |t|^{-\frac{d}{2}} & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{D}{2}} & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

où $x^+ \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ désigne la composante radiale de x dans la décomposition de Cartan.

On note qu'une fois cette conjecture démontrée, on peut en déduire la propriété de dispersion et l'inégalité de Strichartz de la même manière que sur l'espace hyperbolique réel, et ces estimations nous

permettent d'étudier l'équation de Schrödinger semi-linéaire sur les espaces symétriques.

Cette conjecture est valable sur $\mathbb{X} = G/K$ lorsque \mathbb{X} est de rang un ou G est complexe. Comme le noyau de Schrödinger n'est que le noyau de chaleur en temps imaginaire, il possède les expressions plus explicites dans ces deux cas, voir [AnOs03] pour rang un et [Gan68] pour G complexe. Par exemple, lorsque $\mathbb{X} = H^d(\mathbb{R})$ est un espace hyperbolique réel, la transformation d'Abel nous donne l'expression suivante pour le noyau de Schrödinger :

$$s_t(r) = \text{const.} (it)^{-\frac{1}{2}} e^{-i(\frac{d-1}{2})^2 t} \left(-\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{\frac{i}{4} \frac{r^2}{t}} \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^*,$$

grâce à laquelle Anker et Pierfelice ont établi les estimations ponctuelles du noyau [AnPi09] (leur méthode s'étend directement à tous les espaces symétriques de rang un). Lorsque G est complexe, le noyau de Schrödinger devient

$$s_t(x) = \text{const.} (4\pi it)^{-\frac{d}{2}} e^{-i|\rho|^2 t} e^{\frac{i}{4} \frac{|x^+|^2}{t}} J(x^+)^{-\frac{1}{2}}$$

où la fonction jacobienne $J(x)$ est définie par (1.4). Remarquons que $d = D$ dans le cas où G est complexe et la conjecture est évidemment valable.

Dans le cas général, Anker, Meda, Pierfelice et Vallarino (travaux en cours) ont réussi à établir l'estimation (6.1) en temps grand en étudiant l'intégrale oscillante

$$s_t(x) = \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} e^{-it(|\lambda|^2 + |\rho|^2)} \varphi_\lambda(x)$$

Cependant, leur méthode fournit une mauvaise comportement en temps petit, la puissance négative de $|t|$ était trop grande. La décomposition barycentrique que nous avons utilisé pour étudier le noyau des ondes nous donne éventuellement une autre piste sur ce sujet, mais il faut remarquer que, par rapport à la propagation des ondes, celle de Schrödinger ne possède pas la propriété de vitesse finie, nous avons besoin d'une autre méthode pour estimer le développement asymptotique du noyau de Schrödinger.

6.2 Des espaces symétriques aux espaces localement symétriques

Une fois comprises sur les espaces symétriques, il est naturel d'examiner les équations dispersives sur les espaces localement symétriques. À la connaissance de l'auteur, on dispose de réponses partielles sur certains espaces localement symétriques, mais le cas général est encore loin d'être compris.

Nous rappelons que Γ est un sous-groupe discret sans torsion de G qui agit de manière libre et proprement discontinue sur l'espace symétrique \mathbb{X} . On dit que Γ est convexe cocompact lorsque $\Gamma \backslash \text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ est compact, où $\text{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble limite Λ_Γ de Γ dans une compactification de \mathbb{X} . Rappelons aussi que $\delta(\Gamma) \in [0, 2|\rho|]$ est l'exposant critique de la série de Poincaré

$$P_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)} \quad \forall s > 0, \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

L'équation de Schrödinger a été étudiée sur les espaces localement symétriques de rang un tels que Γ est convexe cocompact et que $\delta(\Gamma) < \rho$, voir [BGH10] pour que $\mathbb{X} = \mathbf{H}^{d+1}$ est un espace hyperbolique et [FMM18] pour que \mathbb{X} est un espace symétrique de rang un (avec les hypothèses légèrement différentes). Dans ces deux articles, les auteurs ont établi l'inégalité de Strichartz globale (en temps) pour une grande famille des paires admissibles comme sur les espaces hyperboliques. En particulier, Burq, Guillarmou et Hassell ont indiqué qu'une telle inégalité globale n'est plus valable pour $\delta(\Gamma) > \rho$, voir [BGH10, Remark 1.3]. Récemment, l'inégalité de Strichartz locale a été établie sur les surfaces hyperboliques convexes cocompactes $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ sans restriction sur $\delta(\Gamma)$ [Wan19]. En utilisant le résultat spectral obtenu dans [BoDy18], Wang réussit à établir une inégalité de Strichartz locale avec une perte de régularité, qui est analogue à celle du cas compact [BGT04]. On note que l'approche de Bourgain et Dyatlov utilisée dans [BoDy18] ne fonctionne que sur les surfaces hyperboliques, le problème reste ouvert lorsque $\delta(\Gamma) > \rho$ et \mathbb{X} est de

dimension $d \geq 3$.

Nous avons étudié dans [Chap. 4](#) les équations des ondes et de Klein-Gordon sur les espaces localement symétriques sous les mêmes hypothèses. En utilisant les estimations ponctuelles du noyau sur l'espace symétrique \mathbb{X} , nous avons établi les propriétés de dispersion et l'inégalité de Strichartz sur l'espace localement symétrique \mathbb{Y} à condition que

- \mathbb{X} est de rang un,
- Γ est convexe cocompact,
- $\delta(\Gamma) < \rho$.

Les estimations ponctuelles du noyau pour l'équation des ondes ont été établies sur les espaces symétriques de rang un. La convexe cocompacté implique une majoration uniforme pour la série de Poincaré, qui sert à démontrer la propriété dispersive. La condition de pression $\delta(\Gamma) < \rho$ joue plusieurs rôles importants : tout d'abord, on sait que le trou spectral $\lambda_0(\mathbb{Y})$ est égale à ρ^2 lorsque $\delta(\Gamma) < \rho$ [[Cor90](#)], auquel cas \mathbb{Y} est de volume infini ; ensuite, la série exprimant le noyau sur \mathbb{Y} , qui ressemble à une série de Poincaré, est absolument convergente dans ce cas, ce qui nous permet d'étendre facilement les estimations du noyau obtenues sur les espaces symétriques aux espaces localement symétriques ; enfin, sous cette hypothèse, nous disposons d'un phénomène de Kunze-Stein L^2 , qui n'est pas toujours valable sur les espaces localement symétriques généraux.

Dans [Chap. 3](#), nous avons réussi à établir les estimations ponctuelles du noyau sur les espaces symétriques de rang général, ce qui nous permet d'enlever la première hypothèse sur le rang. Cependant, la notion cocompacté convexe, qui fournit une classe riche d'exemples en rang un, s'avère peu intéressante en rang supérieur. Plus précisément, sur un espace symétrique de type non compact et de rang supérieur, les groupes discrets convexes cocompacts sont les produits de réseaux uniformes et de groupes convexes cocompacts de rang un [[Qui05](#) ; [KILe06](#)]. De plus, l'hypothèse $\delta(\Gamma) < |\rho|$ exclut les réseaux (comme en rang un).

Lorsque \mathbb{X} est de rang un, l'hypothèse de cocompacté convexe de Γ implique une majoration uniforme pour la série de Poincaré. Si nous admettons une telle majoration en rang supérieur, nous pourrions déduire des résultats analogues au rang un. Autrement dit, nous pourrions étendre les résultats obtenus sur l'espace symétrique \mathbb{X} à l'espace localement symétrique \mathbb{Y} à condition que

- $\delta(\Gamma) < |\rho|$,
- pour tout $s > \delta(\Gamma)$, il existe une constante $C > 0$ telle que $P_s(x, y) \leq CP_s(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ pour tout $x, y \in \mathbb{X}$.

On note que le phénomène de Kunze-Stein que nous établissons sur les espaces localement symétriques de rang un sera encore valable en rang supérieur, toujours sous l'hypothèse $\delta(\Gamma) < |\rho|$. Les problèmes concernés restent ouverts sur les espaces localement symétriques généraux.

6.3 Multiplicateurs oscillants liés à l'équation des ondes

Soit f une fonction raisonnable sur \mathbb{X} . Désignons par $\{\mathcal{E}_\zeta\}$ la résolution spectrale de l'identité pour laquelle

$$-\Delta_{\mathbb{X}} f = \int_{|\rho|^2}^{+\infty} \zeta d\mathcal{E}_\zeta f.$$

La famille des multiplicateurs oscillants de l'opérateur de Laplace-Beltrami $W_{\tau, \theta}^\sigma$, où $\theta \in [0, 1]$ et $\tau, \sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \tau \geq 0$ et $\operatorname{Re} \sigma \geq 0$, est définie par

$$W_{\tau, \theta}^\sigma f = \int_{|\rho|^2}^{+\infty} (\zeta - \theta|\rho|^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{-\tau\sqrt{\zeta - \theta|\rho|^2}} d\mathcal{E}_\zeta f.$$

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, on dit que $W_{\tau, \theta}^\sigma$ est L^p - L^q borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|W_{\tau, \theta}^\sigma f\|_{L^q(\mathbb{X})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{X}) \cap L^p(\mathbb{X}), \quad (6.2)$$

sous une condition de régularité $\sigma \in \mathbb{C}$ convenable. Un sujet important dans l'analyse harmonique sur les espaces symétriques est de déterminer les triples (p, q, σ) pour lesquels $W_{\tau, \theta}^\sigma$ soit L^p - L^q borné.

Ce problème a été étudié systématiquement par Cowling, Giulini et Meda dans une série d'articles [CGM93; CGM95; CGM01; CGM02]. Les deux premiers concernent le cas $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, $W_{\tau, \theta}^\sigma$ est en fait un semi-groupe de type chaleur, qui fait l'objet de plusieurs autres travaux, voir par exemple [StTo78; AnLo86; Tay89; Ank90; GiMe90; Ank92; AnJi99]. Considérons le cas où $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ avec $\operatorname{Re} \tau \geq 0$, qui est lié aux opérateurs d'ondes. Lorsque $\theta = 1$, $W_{\tau, \theta}^\sigma$ est un opérateur de Poisson en temps complexe, dont le comportement L^p - L^q a été étudié dans [CGM01]. À partir des estimations obtenues dans [CGM01], Cowling, Giulini et Meda ont étudié $W_{-i, 1}^\sigma$ dans [CGM02], c'est en fait un opérateur des ondes associé au laplacien shifté en temps constant 1.

Soit $\tau = -it$, avec $t \in \mathbb{R}^*$. Alors l'opérateur

$$W_{-it, \theta}^\sigma f = \int_{|\rho|^2}^{+\infty} (\zeta - \theta|\rho|^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\sqrt{\zeta - \theta|\rho|^2}} d\mathcal{E}_\zeta f$$

correspond à un multiplicateur oscillant associé à l'équation des ondes. Clairement, si $W_{-it, \theta}^\sigma$ est L^p - L^q borné pour certains triples (p, q, σ) , la constante dans l'inégalité (6.2) dépend du temps t . Par exemple, un de nos principaux résultats dans cette thèse est la propriété de dispersion suivante pour l'opérateur des ondes non-shifté $W_{-it, 0}^\sigma$:

$$\|W_{-it, 0}^\sigma\|_{L^{q'}(\mathbb{X}) \rightarrow L^q(\mathbb{X})} \lesssim \begin{cases} |t|^{-(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{d}{2}} & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

avec $2 \leq q < +\infty$ et $\sigma \geq (d+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Autrement dit, $W_{-it, 0}^\sigma$ est $L^{q'}$ - L^q borné avec les décroissances indiquées en temps. Comme nous l'avons déjà mentionné, ces décroissances optimales servent à établir l'inégalité de Strichartz.

La décroissance en temps de la norme L^p - L^p de l'opérateur $W_{-it, \theta}^\sigma$ peut également contribuer à comprendre la condition de régularité minimale dans la théorie de multiplicateurs de Fourier sur les espaces symétriques. Ce problème a été étudié dans des cas particuliers [ClSt74; StTo78; AnLo86; Tay89], puis par Anker [Ank90] en général. Par la suite, les hypothèses ont été optimisées par Ionescu [Ion00b] en rang un, mais pas encore en rang supérieur. La décomposition spectrale introduite dans Sect. 3.2.3 nous donne certainement une piste en rang supérieur. Cependant, il faut remarquer que, dans les estimations ponctuelles du noyau Théorème I, nous n'avons pas cherché à optimiser la croissance polynomiale en espace, compte tenu de la décroissance exponentielle. Dans les études sur les multiplicateurs, ce polynôme pourra jouer un rôle essentiel, qui nécessite une estimation du noyau plus fine et fera l'objet d'études ultérieures.

Annexe

Dans cette annexe, nous précisons les calculs sur le développement asymptotique du noyau de Poisson que nous avons omise dans [Sect. 3.3.2](#). Sous le nom de Hadamard, cette méthode concerne la construction explicite d'une parametrix pour les opérateurs différentiels du second ordre basée sur des développements en séries entières. Après l'oeuvre pionnière de Hadamard, Bérard a décrit dans son article célèbre [\[Bér77\]](#) une formule plus accessible¹ pour la solution fondamentale de l'équation des ondes sur les variétés compactes à condition que la distance entre deux points soit inférieure au rayon d'injectivité. Grâce à une telle construction, Cowling, Giulini et Meda ont obtenu dans [\[CGM01\]](#) certaines estimations L^p - L^q de l'opérateur de Poisson. Dans cette thèse, nous en avons besoin dans le cas particulier des espaces symétriques non compacts. Nous décrivons dans la suite les détails de la paramétrix de Hadamard en reprenant les méthodes dans [\[Hor94, Section 17.4\]](#), [\[Bér77, Section D\]](#) et [\[CGM01, p.p.1054-1068\]](#).

A Paramétrix de Hadamard

Nous rappelons que $\Phi_v(x)$ est le noyau de convolution K -bi-invariant de l'opérateur $\cos(v\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}})$ dont la transformation de Fourier sphérique est donnée par $\tilde{\Phi}_v(\lambda) = \cos(v\sqrt{|\lambda|^2 + |\rho|^2})$. Alors $\Phi_v(x)$ résout le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} [\partial_v^2 - \Delta_{\mathbb{X}}]U(v, x) = 0, \\ U(0, x) = \delta_0(x), \quad \partial_v|_{v=0}U(v, x) = 0. \end{cases}$$

Nous recherchons un développement asymptotique du noyau $\Phi_v(x)$ sur \mathbb{X} . Rappelons que J désigne le jacobien de l'application exponentielle de \mathfrak{p} équipé de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{X} équipé de la mesure riemannienne, voir [\(1.4\)](#). Il satisfait

$$J(H)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left(\frac{\langle \alpha, H \rangle}{\sinh \langle \alpha, H \rangle} \right)^{\frac{m_\alpha}{2}} \asymp \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (1 + \langle \alpha, H \rangle)^{\frac{m_\alpha}{2}} \right\} e^{-\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

Laplacien radial. Soit f une fonction K -bi-invariante sur G , alors elle est à la fois $\text{Ad } K$ -invariante sur \mathfrak{p} et W -invariante sur \mathfrak{a} . Rappelons que $\Delta_{\mathfrak{p}}$ et $\Delta_{\mathfrak{a}}$ désignent les laplaciens usuels sur les espaces de type euclidien \mathfrak{p} et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. La partie radiale du laplacien $\Delta_{\mathbb{X}}$ est définie par

$$\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}} f(H) = \Delta_{\mathfrak{a}} f(H) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \coth \langle \alpha, H \rangle \partial_\alpha f(H),$$

et celle de $\Delta_{\mathfrak{p}}$ est donnée par

$$\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} f(H) = \Delta_{\mathfrak{a}} f(H) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \langle \alpha, H \rangle^{-1} \partial_\alpha f(H),$$

voir [\[Hel00, Propositions 3.9 et 3.11\]](#). La proposition suivante, qui fournit une relation entre $\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}}$ et $\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}}$, nous permet de simplifier les calculs sur la paramétrix.

1. Voir aussi [\[Bon17\]](#) pour la paramétrix de Hadamard modelée sur l'espace hyperbolique

Proposition A.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})$ une fonction W -invariante. Alors*

$$[J(H)^{\frac{1}{2}} \circ \Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}} \circ J(H)^{-\frac{1}{2}}] f(H) = [\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} + \omega(H)] f(H) \quad \forall H \in \mathfrak{a},$$

où

$$\begin{aligned} \omega(H) &= \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha}{2} \left(\frac{m_\alpha}{2} - 1 \right) |\alpha|^2 \left\{ \frac{1}{\langle \alpha, H \rangle} - \frac{1}{\sinh^2 \langle \alpha, H \rangle} \right\} \\ &+ \sum_{\substack{\alpha \in \Sigma^+ \\ \text{t.q. } 2\alpha \in \Sigma^+}} \frac{m_\alpha m_{2\alpha}}{2} |\alpha|^2 \left(\frac{m_\alpha}{2} - 1 \right) |\alpha|^2 \left\{ \frac{1}{\langle \alpha, H \rangle} - \frac{1}{\sinh^2 \langle \alpha, H \rangle} \right\} - |\rho|^2 \end{aligned}$$

est une fonction régulière, W -invariante et uniformément bornée, ainsi que toutes ses dérivées.

Démonstration. Remarquons que

$$\begin{aligned} &[J(H)^{\frac{1}{2}} \circ \Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}} \circ J(H)^{-\frac{1}{2}}] f(H) \\ &= J(H)^{\frac{1}{2}} (\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}} J^{-\frac{1}{2}})(H) f(H) + \underbrace{\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}} f(H) + 2J(H)^{\frac{1}{2}} (\nabla_{\mathfrak{a}} J^{-\frac{1}{2}})(H) \cdot \nabla_{\mathfrak{a}} f(H)}_{\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} f(H)}, \end{aligned}$$

car

$$J(H)^{\frac{1}{2}} (\nabla_{\mathfrak{a}} J^{-\frac{1}{2}})(H) = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha}{2} \left\{ \frac{1}{\langle \alpha, H \rangle} - \coth \langle \alpha, H \rangle \right\} \alpha.$$

Alors il suffit de démontrer que

$$J(H)^{\frac{1}{2}} (\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}} J^{-\frac{1}{2}})(H) = \omega(H) \quad \forall H \in \mathfrak{a}. \quad (\text{A.1})$$

Comme

$$\begin{aligned} J(H)^{\frac{1}{2}} (\Delta_{\mathfrak{a}} J^{-\frac{1}{2}})(H) &= \overbrace{\sum_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha}{2} \left\{ \frac{1}{\sinh^2 \langle \alpha, H \rangle} - \frac{1}{\langle \alpha, H \rangle^2} \right\} |\alpha|^2}^{S_1} \\ &+ \sum_{\alpha, \beta \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha m_\beta}{2} \langle \alpha, \beta \rangle \left\{ \frac{1}{\langle \alpha, H \rangle} - \coth \langle \alpha, H \rangle \right\} \left\{ \frac{1}{\langle \beta, H \rangle} - \coth \langle \beta, H \rangle \right\} \end{aligned}$$

et

$$J(H)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \coth \langle \alpha, H \rangle (\partial_{\alpha} J^{-\frac{1}{2}})(H) = \sum_{\alpha, \beta \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha m_\beta}{2} \langle \alpha, \beta \rangle \coth \langle \alpha, H \rangle \left\{ \frac{1}{\langle \beta, H \rangle} - \coth \langle \beta, H \rangle \right\},$$

nous en déduisons que

$$J(H)^{\frac{1}{2}} (\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}} J^{-\frac{1}{2}})(H) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

avec

$$S_2 = \sum_{\alpha, \beta \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha m_\beta}{2} \langle \alpha, \beta \rangle \left\{ \frac{\coth \langle \alpha, H \rangle}{\langle \beta, H \rangle} - \frac{\coth \langle \beta, H \rangle}{\langle \alpha, H \rangle} \right\} = 0,$$

$$S_3 = \sum_{\alpha, \beta \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha m_\beta}{2} \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, H \rangle \langle \beta, H \rangle} \quad \text{et} \quad S_4 = - \sum_{\alpha, \beta \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha m_\beta}{2} \langle \alpha, \beta \rangle \coth \langle \alpha, H \rangle \coth \langle \beta, H \rangle.$$

Selon le lemme suivant, nous obtenons

$$S_3 = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Sigma^+ \\ \mathbb{R}\alpha = \mathbb{R}\beta}} \frac{m_\alpha}{2} \frac{m_\beta}{2} \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, H \rangle \langle \beta, H \rangle} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha^2}{4} \frac{|\alpha|^2}{\langle \alpha, H \rangle^2} + \sum_{\substack{\alpha \in \Sigma^+ \\ \text{t.q. } 2\alpha \in \Sigma^+}} \frac{m_\alpha m_{2\alpha}}{2} \frac{|\alpha|^2}{\langle \alpha, H \rangle^2},$$

et

$$\begin{aligned} S_4 &= -|\rho|^2 - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Sigma^+ \\ \mathbb{R}\alpha = \mathbb{R}\beta}} \frac{m_\alpha}{2} \frac{m_\beta}{2} \langle \alpha, \beta \rangle (\coth \langle \alpha, H \rangle \coth \langle \beta, H \rangle - 1) \\ &= -|\rho|^2 - \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{m_\alpha^2}{4} \frac{|\alpha|^2}{\sinh^2 \langle \alpha, H \rangle} - \sum_{\substack{\alpha \in \Sigma^+ \\ \text{t.q. } 2\alpha \in \Sigma^+}} \frac{m_\alpha m_{2\alpha}}{2} \frac{|\alpha|^2}{\sinh^2 \langle \alpha, H \rangle}, \end{aligned}$$

ce qui implique (A.1). Comme $r \mapsto \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\sinh^2(r)}$ est une fonction régulière et uniformément bornée pour tout $r \in \mathbb{R}$, ainsi que ses dérivées, $\omega(H)$ l'est aussi pour tout $H \in \mathfrak{a}$. \square

Lemme A.2 (Lemme d'annulation). *Les égalités suivantes sont valables pour tout $H \in \mathfrak{a}$:*

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta \in \Sigma^+, \mathbb{R}\alpha \neq \mathbb{R}\beta} m_\alpha m_\beta \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, H \rangle \langle \beta, H \rangle} &= 0 \\ \sum_{\alpha, \beta \in \Sigma^+, \mathbb{R}\alpha \neq \mathbb{R}\beta} m_\alpha m_\beta \langle \alpha, \beta \rangle (\coth \langle \alpha, H \rangle \coth \langle \beta, H \rangle - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Voir [HaSt03, Appendix] pour la démonstration détaillée de ce résultat « folklorique ». \square

Développement asymptotique du noyau. Rappelons que $\{R_+^z \mid z \in \mathbb{C}\}$ désigne la famille analytique des distributions de Riesz sur \mathbb{R} définie par

$$R_+^z(r) = \begin{cases} \Gamma(z)^{-1} r^{z-1} & \text{si } r > 0, \\ 0 & \text{si } r \leq 0, \end{cases}$$

lorsque $\text{Re } z > 0$. Nous savons que

$$\frac{d}{dr} R_+^z(r) = R_+^{z-1}(r) \quad \text{et} \quad r R_+^z(r) = z R_+^{z+1}(r). \quad (\text{A.2})$$

Soit $U_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{p})$ une fonction Ad K -invariante pour chaque $k \in \mathbb{N}$, nous considérons le développement asymptotique

$$\Phi_v(\exp H) = J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k} |v| \underbrace{U_k(H) R_+^{k-\frac{d-1}{2}}(v^2 - |H|^2)}_{f_k(v, H)}, \quad (\text{A.3})$$

où $f_k(v, \cdot)$ est définie au sens des distributions :

$$\langle f_k(v, \cdot) J^{-\frac{1}{2}}, \Psi \rangle = |v| \int_{\mathfrak{p}} dX J(X)^{\frac{1}{2}} U_k(X) R_+^{k-\frac{d-1}{2}}(v^2 - |X|^2) \Psi(X),$$

pour toute fonction test Ad K -invariante dans \mathfrak{p} . Sans limiter la généralité, on peut supposer dorénavant que $v \geq 0$.

Étape 1. Déterminer U_0 . Nous choisissons U_0 comme une constante telle que

$$f_0(v, \cdot) J^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow \delta_0,$$

lorsque v tends vers 0. Précisément,

$$\begin{aligned} \langle f_0(v, \cdot) J^{-\frac{1}{2}}, \Psi \rangle &= U_0 v \int_{\mathfrak{p}} dX J(X)^{\frac{1}{2}} R_+^{-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |X|^2) \Psi(X) \\ &= U_0 v^{d+1} \int_{\{X \in \mathfrak{p} \mid |X| < 1\}} dX J(vX)^{\frac{1}{2}} \frac{(v^2 - |vX|^2)^{z-1}}{\Gamma(z)} \Psi(vX) \Big|_{z=-\frac{d-1}{2}} \\ &\xrightarrow{v \rightarrow 0} U_0 \Psi(0) \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \underbrace{\left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^1 dr r^{\frac{d}{2}-1} (1-r)^{z-1} \right\}}_{B(\frac{d}{2}, z)} \Big|_{z=-\frac{d-1}{2}} \end{aligned}$$

où

$$B\left(\frac{d}{2}, z\right) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{d}{2} + z)}$$

est la fonction bêta. En prenant $U_0 = \pi^{-\frac{d-1}{2}}$, nous avons

$$\langle f_0(v, \cdot) J^{-\frac{1}{2}}, \Psi \rangle \xrightarrow{v \rightarrow 0} \Psi(0).$$

Étape 2. Déterminer U_k pour tout $k \geq 1$. D'après la K -bi-invariance du noyau, nous allons développer

$$J(H)^{\frac{1}{2}} [\partial_v^2 - \Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}}] \left\{ J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k} f_k(v, H) \right\} = 0.$$

Selon Proposition A.1, il est équivalent d'étudier

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k} [\partial_v^2 - \Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} - \omega(H)] f_k(v, H) = 0.$$

Des calculs élémentaires nous donnent

$$\partial_v^2 f_k(v, H) = (6v) U_k(H) R_+^{(k-1) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) + (4v^3) U_k(H) R_+^{(k-2) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{a}} f_k(v, H) &= v(\Delta_{\mathfrak{a}} U_k(H)) R_+^{k - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) - (4v)(\partial_H U_k(H)) \chi_+^{(k-1) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) \\ &\quad - (2\ell v) U_k(H) R_+^{(k-1) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) + (4v|H|^2) U_k(H) R_+^{(k-2) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_{\alpha} \langle \alpha, H \rangle^{-1} \partial_{\alpha} f_k(v, H) &= v \left\{ \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_{\alpha} \langle \alpha, H \rangle^{-1} \partial_{\alpha} U_k(H) \right\} R_+^{k - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) \\ &\quad - 2v \underbrace{\left\{ \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_{\alpha} \right\}}_{d-\ell} U_k(H) R_+^{(k-1) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} [\partial_v^2 - \Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} - \omega(H)] f_k(v, H) &= v \left\{ [-\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} - \omega(H)] U_k(H) \right\} R_+^{k - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) \\ &\quad + 4v \left\{ [k + \partial_H] U_k(H) \right\} R_+^{(k-1) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2), \end{aligned}$$

et en déduisons

$$0 = \sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k} v R_+^{k-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) \left\{ [-\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} - \omega(H)] U_k(H) + [(k+1) + \partial_H] U_{k+1}(H) \right\}.$$

Alors les données U_{k+1} doivent satisfaire la relation par récurrence :

$$[(k+1) + \partial_H] U_{k+1}(H) = [\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} + \omega(H)] U_k(H), \quad (\text{A.4})$$

ou encore la formule intégrale :

$$U_{k+1}(H) = \int_0^1 ds \frac{\partial}{\partial s} \{ s^{k+1} U_{k+1}(sH) \} = \int_0^1 ds s^k [\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} + \omega(sH)] U_k(sH) \quad (\text{A.5})$$

pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Comme U_0 est une constante, que ω et toutes ses dérivées sont bornées, nous déduisons

$$\nabla_{\mathfrak{p}}^n U_k = O(1) \quad (\text{A.6})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Étape 3. Estimer l'erreur. Nous considérons maintenant la version tronquée du développement asymptotique (A.3) :

$$\Phi_v(\exp H) = \underbrace{J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^N 4^{-k} v U_k(H) R_+^{k-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2)}_{S_N(v, H)} + E_N(v, \exp H) \quad (\text{A.7})$$

où $N > d$ est un entier.

Proposition A.3. *Soit $N > d$ un entier. Pour tout $v \geq 0$ et $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$, $E_N(v, \exp H)$ satisfait*

$$\begin{cases} [\partial_v^2 - \Delta_{\mathfrak{X}}^{\text{rad}}] E_N(v, \exp H) = J(H)^{-\frac{1}{2}} \tilde{U}_N(v, H), \\ \lim_{v \rightarrow 0} E_N(v, \exp H) = 0, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial E_N}{\partial v}(v, \exp H) = 0, \end{cases}$$

où $\tilde{U}_N(v, H) = -4^{-N} v U_N(H) R_+^{N-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2)$.

Remarque A.4. *Une proposition analogue a été démontrée par Bérard [Bér77, Proposition 27], nous la traduisons dans notre contexte.*

Démonstration. Selon la relation par récurrence (A.4), nous savons que

$$[\partial_v^2 - \Delta_{\mathfrak{X}}^{\text{rad}}] S_N(v, H) = 4^{-N} v U_N(H) R_+^{N-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) J(H)^{-\frac{1}{2}}$$

est une fonction intégrable pour $N > \frac{d-1}{2}$, elle s'annule lorsque $v < |H|$. Par ailleurs, comme

$$v U_k(H) R_+^{k-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) J(H)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \begin{cases} \delta_0 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

nous en déduisons $\lim_{v \rightarrow 0} S_N(v, H) = \delta_0(H)$. Par conséquent,

$$[\partial_v^2 - \Delta_{\mathfrak{X}}^{\text{rad}}] E_N(v, \exp H) = J(H)^{-\frac{1}{2}} \tilde{U}_N(v, H),$$

et

$$\lim_{v \rightarrow 0} E_N(v, \exp H) = 0.$$

Quant à la seconde donnée initiale, considérons le développement asymptotique tronqué du noyau de $\frac{\sin(v-u)\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}}}}$:

$$\tilde{S}_N(v, H) = \frac{1}{2} J(H)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(v) \sum_{k=0}^N 4^{-k} U_k(H) R_+^{(k+1) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2).$$

Des calculs similaires à ceux effectués pour S_N donnent

- $\partial_v \tilde{S}_N(v, H) = S_N(v, H)$,
- $[\partial_v^2 - \Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}}] \tilde{S}_N(v, H) = 4^{-N+\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(v) U_N(H) R_+^{(N+1) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) J(H)^{-\frac{1}{2}}$,
- $\lim_{v \rightarrow 0} \tilde{S}_N(v, H) = 0$.

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \partial_v E_N(v, \exp H) &= -\partial_v \Phi_v(\exp H) - \partial_v^2 \tilde{S}_N(v, H) \\ &= -\partial_v \Phi_v(\exp H) - \Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}} \tilde{S}_N(v, H) - 4^{-N+\frac{1}{2}} U_N(H) R_+^{(N+1) - \frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) J(H)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

converge vers 0 au sens des distributions lorsque v tend vers 0. \square

Proposition A.5. *Soit $N > d$. L'estimation ponctuelle suivante est valable pour tout $v \geq 0$ et $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$:*

$$|E_N(v, \exp H)| \lesssim (1+v)^{2N-\frac{d}{2}+1} e^{-\langle \rho, H \rangle}. \quad (\text{A.8})$$

Démonstration. D'après la formule de Duhamel, nous écrivons

$$E_N(v, \exp H) = \int_0^v du \frac{\sin(v-u)\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}}}} \{ \tilde{U}_N(u, H) J(H)^{-\frac{1}{2}} \}.$$

Selon le plongement de Sobolev [Théorème 1.1.6](#) et la conservation d'énergie L^2 , nous obtenons

$$|E_N(v, \exp H)| \lesssim e^{-\langle \rho, H \rangle} \|E_N(v, \cdot)\|_{H^{2\sigma+1}(\mathbb{X})} \lesssim e^{-\langle \rho, H \rangle} \int_0^v du \|\tilde{U}_N(u, \cdot) J^{-\frac{1}{2}}\|_{H^{2\sigma}(\mathbb{X})}$$

avec $2\sigma + 1 > \frac{d}{2}$ et

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}_N(u, \cdot) J^{-\frac{1}{2}}\|_{H^{2\sigma}(\mathbb{X})}^2 &= \|\Delta_{\mathbb{X}}^{\sigma} \{ \tilde{U}_N(u, \cdot) J^{-\frac{1}{2}} \}\|_{L^2(\mathbb{X})}^2 \\ &= \text{const.} \int_{\mathfrak{p}} dX |J(X)^{\frac{1}{2}} (\Delta_{\mathbb{X}}^{\text{rad}})^{\sigma} \{ J(X)^{-\frac{1}{2}} \tilde{U}_N(u, X) \}|^2 \\ &= \text{const.} u^2 \int_{\mathfrak{p}} dX |[\Delta_{\mathfrak{p}}^{\text{rad}} + \omega(X)]^{\sigma} (\tilde{U}_N(u, X))|^2 \\ &\lesssim u^2 \sum_{j=0}^{2\sigma} \int_{\{X \in \mathfrak{p} \mid |X| < u\}} dX |\nabla_{\mathfrak{p}}^j (u^2 - |X|^2)^{N-\frac{d+1}{2}}|^2 \lesssim (1+u)^{4N-d}, \end{aligned}$$

comme ω et U_N sont uniformément bornées, ainsi que toutes leurs dérivées. Ici, nous devons prendre $N > \frac{d+1}{2} + 2\sigma$ pour éviter les singularités possibles lorsque $u = |X|$, il suffit de considérer $2\sigma = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ et $N > d$. Nous en déduisons enfin

$$|E_N(v, \exp H)| \lesssim e^{-\langle \rho, H \rangle} \int_0^v du (1+u)^{2N-\frac{d}{2}} \lesssim (1+v)^{2N-\frac{d}{2}+1} e^{-\langle \rho, H \rangle}$$

à condition que $2\sigma = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ et $N > d$. \square

Nous reprenons le développement asymptotique tronqué (A.7) et écrivons

$$\begin{aligned} \Phi_v(\exp H) &= J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{[d/2]} 4^{-k} v U_k(H) R_+^{k-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) \\ &\quad + \underbrace{J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=[\frac{d}{2}]+1}^N 4^{-k} v U_k(H) R_+^{k-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) + E_N(v, \exp H)}_{\lesssim (1+v)^{2N-\frac{d+\ell}{2}} e^{-\langle \rho, H \rangle}}. \end{aligned}$$

Nous obtenons enfin le corollaire suivant en prenant $N = d + 1$.

Corollaire A.6. *Le noyau K -bi-invariant Φ_v possède le développement asymptotique*

$$\Phi_v(\exp H) = J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{[d/2]} 4^{-k} |v| U_k(H) R_+^{k-\frac{d-1}{2}} (v^2 - |H|^2) + E_\Phi(v, H) \quad (\text{A.9})$$

où le reste satisfait

$$|E_\Phi(v, H)| \lesssim (1 + |v|)^{3(\frac{d}{2}+1)} e^{-\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}. \quad (\text{A.10})$$

B Développement asymptotique du noyau de Poisson

La paramétrix de Hadamard décrite ci-dessus fournit un développement asymptotique du noyau de l'opérateur de Poisson tronqué

$$A_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \chi_T(v) p_\tau^\mathbb{R}(v) \cos(v\sqrt{-\Delta_{\mathbb{X}}}).$$

Ici $\tau = s - it$ avec $s \in (0, 1]$ et $t \in \mathbb{R}^*$,

$$T = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } 0 < |t| \leq 1, \\ \sqrt{2}|t| & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

$\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction plateau telle que $\chi = 1$ dans $[-1, 1]$ et $\text{supp } \chi \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, et $p_\tau^\mathbb{R}(v) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau}{\tau^2 + v^2}$ est le noyau de Poisson sur \mathbb{R} avec le temps complexe τ . On note que $|\tau| \leq T$ et $\text{supp } \chi_T \subset [-2\sqrt{2}T, 2\sqrt{2}T]$

Proposition B.1. *Le noyau a_τ de l'opérateur A_τ est une fonction régulière K -bi-invariante sur G , qui est supportée dans la boule de rayon $2\sqrt{2}T$. De plus*

$$a_\tau(\exp H) = \frac{\tau}{\pi} J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{[d/2]} 4^{-k} U_k(H) \Gamma\left(\frac{d+1}{2} - k\right) (|H|^2 + \tau^2)^{k-\frac{d+1}{2}} + E(\tau, H) \quad \forall H \in \mathfrak{p} \quad (\text{B.11})$$

où le reste satisfait

$$|E(\tau, H)| \lesssim |T|^{3(\frac{d}{2}+1)} (\log T - \log s) e^{-\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}. \quad (\text{B.12})$$

Ici, les coefficients U_k sont les mêmes que dans (A.9).

Cette proposition a été démontrée par Cowling, Giulini et Meda [CGM01, Lemma 3.3] pour $|\tau|$ petit, c'est-à-dire en temps $|t|$ petit. En reprenant leur argument avec la paramétrix (A.9) et les nouvelles estimations (A.6) et (A.10), nous démontrons cette proposition en tout temps. On note que nos estimations contiennent une décroissance exponentielle supplémentaire, qui est cruciale pour établir la propriété de dispersion. Pour y arriver, nous empruntons deux lemmes techniques à [CGM01]. Nous les énonçons et les redémontrons dans notre contexte.

Lemme B.2. Soient $n \geq 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$|z|^{2\gamma-n} \int_0^{3T} dr r^{n-1} |r^2 + z^2|^{-\gamma} \asymp \begin{cases} \left(\frac{|z|}{\operatorname{Re} z}\right)^{\gamma-1} & \text{si } \gamma > 1 \text{ et } n < 2\gamma, \\ \left(\frac{T}{|z|}\right)^{n-2} + \log\left(\frac{|z|}{\operatorname{Re} z}\right) & \text{si } \gamma = 1 \text{ et } n > 2, \\ 1 + \log\left(\frac{T}{\operatorname{Re} z}\right) & \text{si } \gamma = 1 \text{ et } n = 2, \\ 1 + \log\left(\frac{|z|}{\operatorname{Re} z}\right) & \text{si } \gamma = 1 \text{ et } n < 2. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$ et $|z| \leq T$.

Démonstration. Nous écrivons $z = |z|e^{i\theta}$ en coordonnées polaires, avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. En effectuant le changement des variables $r = |z|w$, le côté gauche de (B.13) devient

$$I = \int_0^{\frac{3T}{|z|}} dw w^{n-1} |w^2 + e^{i2\theta}|^{-\gamma}.$$

Remarquons que $\frac{3T}{|z|} > 2$ et que

$$|w^2 - 1| \leq |w^2 + e^{i2\theta}| \leq |w^2 + 1|. \quad (\text{B.14})$$

Nous divisons $I = I_0 + I_1 + T_\infty$ selon

$$\int_0^{\frac{3T}{|z|}} dw = \int_0^{\frac{1}{2}} dw + \int_{\frac{1}{2}}^2 dw + \int_2^{\frac{3T}{|z|}} dw.$$

La première et la dernière intégrales sont facilement estimées. D'après (B.14),

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \leq |w^2 + e^{i2\theta}| \leq \frac{5}{4} & \text{si } 0 < w \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4}w^2 \leq |w^2 + e^{i2\theta}| \leq \frac{5}{4}w^2 & \text{si } w \geq 2, \end{cases}$$

nous en déduisons

$$I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} dw w^{n-1} \asymp 1 \quad (\text{B.15})$$

et

$$I_\infty = \int_2^{\frac{3T}{|z|}} dw w^{n-2\gamma-1} \asymp \begin{cases} 1 & \text{si } n < 2\gamma, \\ 1 + \log \frac{T}{|z|} & \text{si } n = 2\gamma, \\ \left(\frac{T}{|z|}\right)^{n-2\gamma} & \text{si } n > 2\gamma. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Pour l'intégrale restante sur $\frac{1}{2} \leq w \leq 2$, nous utilisons

$$|w^2 + e^{i2\theta}|^2 = w^2 + 1 + 2w^2 \cos 2\theta = (w^2 - 1)^2 + 4w^2 \cos^2 \theta \asymp \left(w - \frac{1}{w}\right)^2 + \cos^2 \theta.$$

En effectuant le changement des variables $u = w - \frac{1}{w}$ et remarquant que $\frac{du}{dw} = 1 + \frac{1}{w^2} \asymp 1$, nous obtenons

$$I_1 \asymp \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} du (u^2 + \cos^2 \theta)^{-\frac{\gamma}{2}} \asymp \int_0^{\frac{3}{2}} du (u + \cos \theta)^{-\gamma} \asymp \begin{cases} (\cos \theta)^{-\gamma-1} & \text{si } \gamma > 1, \\ 1 - \log(\cos \theta) & \text{si } \gamma = 1, \\ 1 & \text{si } \gamma < 1. \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

En conclusion, (B.13) est obtenue en combinant (B.15), (B.16) et (B.17). \square

Lemme B.3. Soient $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$ et $u \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_0^{+\infty} d(w^2) R_+^{1-\varepsilon}(w^2 - u^2) \frac{1}{\pi} \frac{\tau}{w^2 + z^2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{z}{u^2 + z^2} & \text{si } \varepsilon = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{\sqrt{u^2 + z^2}} & \text{si } \varepsilon = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Démonstration. Le cas $\varepsilon = 1$ découle immédiatement du fait que la distribution R_+^0 est égale à la mesure de Dirac à l'origine. Dans le cas $\varepsilon = \frac{1}{2}$, la formule est prouvée d'abord pour $z > 0$ et ensuite étendue directement par prolongement analytique à tous les $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$. Précisément, le côté gauche de (B.18) devient

$$\pi^{-\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{d(w^2)}{w} \frac{z}{w^2 + u^2 + z^2} = \underbrace{2\pi^{-\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2 + 1}}_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \frac{z}{\sqrt{u^2 + z^2}}$$

après avoir effectué le changement des variables $w = \sqrt{u^2 + z^2} r$. \square

Démonstration de Proposition B.1. Selon le développement asymptotique (A.9), nous écrivons

$$a_\tau(\exp H) = J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{[d/2]} 4^{-k} U_k(H) I_k(\tau, H) + E(\tau, H)$$

avec

$$I_k(\tau, H) = \int_0^{+\infty} d(v^2) p_\tau^{\mathbb{R}}(v) R_+^{k - \frac{d-1}{2}}(v^2 - |H|^2)$$

et

$$E(\tau, H) = J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{[d/2]} 4^{-k} U_k(H) \int_0^{+\infty} d(v^2) \{\chi_T(v) - 1\} p_\tau^{\mathbb{R}}(v) R_+^{k - \frac{d-1}{2}}(v^2 - |H|^2) \\ + 2 \int_0^{+\infty} dv \chi_T(v) p_\tau^{\mathbb{R}}(v) E_\Phi(v, H)$$

Soient $\varepsilon = 1$ lorsque d est impaire et $\varepsilon = \frac{1}{2}$ lorsque d est paire. Alors

$$I_k(\tau, H) = \left(-\frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^{[\frac{d}{2}] - k} \int_0^{+\infty} d(v^2) p_\tau^{\mathbb{R}}(v) R_+^{1-\varepsilon}(v^2 - |H|^2)$$

où

$$\int_0^{+\infty} d(v^2) p_\tau^{\mathbb{R}}(v) R_+^{1-\varepsilon}(v^2 - |H|^2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\tau}{|H|^2 + \tau^2} & \text{si } \varepsilon = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\tau}{\sqrt{|H|^2 + \tau^2}} & \text{si } \varepsilon = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

selon (B.18). Donc, dans tout cas, nous avons

$$I_k(\tau, H) = \frac{\tau}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2} - k)}{(|H|^2 + \tau^2)^{\frac{d+1}{2} - k}}.$$

Ensuite, nous estimons le reste $E(\tau, H)$ dont la deuxième partie est facilement à étudier. En utilisant (A.10), nous obtenons

$$|E_2(\tau, H)| \leq 2 \int_0^{+\infty} dv \chi_T(v) |p_\tau^{\mathbb{R}}(v)| |E_\Phi(v, H)| \lesssim e^{-\langle \rho, H \rangle} \int_0^{3T} dv \frac{|\tau|}{|v^2 + \tau^2|} (1 + v^{3(\frac{d}{2} + 1)}).$$

où

$$|\tau| \int_0^{3T} dv |v^2 + \tau^2|^{-1} \lesssim 1 + \log \frac{|\tau|}{\operatorname{Re} \tau}$$

et

$$|\tau| \int_0^{3T} dv |v^2 + \tau^2|^{-1} v^{3(\frac{d}{2}+1)} \lesssim |\tau|^{3(\frac{d}{2}+1)} \left\{ \left(\frac{T}{|\tau|} \right)^{\frac{3d+1}{2}} + \log \frac{|\tau|}{\operatorname{Re} \tau} \right\}$$

d'après les formules (B.13). Nous en déduisons

$$|E_2(\tau, H)| \lesssim T^{3(\frac{d}{2}+1)} (\log T - \log s) e^{-\langle \rho, H \rangle}. \quad (\text{B.19})$$

Il nous reste à estimer

$$E_1(\tau, H) = J(H)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} 4^{-k} U_k(H) \underbrace{\int_0^{+\infty} d(v^2) \{ \chi_T(v) - 1 \} p_{\tau}^{\mathbb{R}}(v) R_+^{k - \frac{d-1}{2}}(v^2 - |H|^2)}_{\tilde{I}_k(\tau, H)}.$$

En reprenant les calculs précédents pour I_k , nous écrivons

$$\tilde{I}_k(\tau, H) = \frac{\tau}{\pi} \left(- \frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - k} \int_0^{+\infty} d(v^2) \{ \chi_T(\sqrt{v^2 + |H|^2}) - 1 \} \frac{1}{v^2 + |H|^2 + \tau^2} R_+^{1-\varepsilon}(v^2).$$

Considérons tout d'abord le cas où $\varepsilon = 1$, i.e., d est impair. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{I}_k(\tau, H) &= \frac{\tau}{\pi} \left(- \frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^{\frac{d-1}{2} - k} \left\{ (\chi_T(|H|) - 1) \frac{1}{|H|^2 + \tau^2} \right\} \\ &= \frac{\tau}{\pi} \sum_{j+j'=\frac{d-1}{2}-k} \frac{(\frac{d-1}{2}-k)!}{j!j'} \left(- \frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^j (\chi_T(|H|) - 1) \left(- \frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^{j'} \frac{1}{|H|^2 + \tau^2}. \end{aligned}$$

D'une part, l'expression $\left(- \frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^j (\chi_T(|H|) - 1)$ s'annule lorsque $|H| \leq 2T$. De plus, c'est un $O(T^{-2j})$. D'autre part,

$$\left(- \frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^{j'} \frac{1}{|H|^2 + \tau^2} = \frac{j'!}{(|H|^2 + \tau^2)^{j'+1}} = O(T^{-2j'-2})$$

lorsque $|H| \geq 2T$. On en déduit que

$$|\tilde{I}_k(\tau, H)| = O(T^{2k-d}).$$

Considérons ensuite le cas où $\varepsilon = \frac{1}{2}$, i.e., d est pair. Alors

$$\tilde{I}_k(\tau, H) = \frac{2\tau}{\pi} \sum_{j+j'=\frac{d}{2}-k} \frac{(\frac{d}{2}-k)!}{j!} \int_0^{+\infty} dv \left(- \frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^j \{ \chi_T(\sqrt{v^2 + |H|^2}) - 1 \} (v^2 + |H|^2 + \tau^2)^{-j'-1}.$$

À nouveau, l'expression $\left(- \frac{\partial}{\partial(|H|^2)} \right)^j \{ \chi_T(\sqrt{v^2 + |H|^2}) - 1 \}$ est un $O(T^{-2j})$, qui s'annule lorsque $v^2 + |H|^2 \leq 4T^2$, ainsi que $v^2 + |H|^2 \geq 9T^2$ si $j > 0$. Il s'ensuit que l'intégral ci-dessus est $O(T^{2k-d-1})$ si $j > 0$, et qu'elle est estimée par

$$\int_{v^2 + |H|^2 \geq 4T^2} dv |v^2 + |H|^2 + \tau^2|^{k - \frac{d}{2} - 1} \lesssim \int_{v + |H| \geq 2T} dv (v + |H|)^{2k-d-2} \asymp T^{2k-d-1}$$

si $j = 0$. Dans tous les cas, on obtient

$$|\tilde{I}_k(\tau, H)| \lesssim T^{2k-d} \lesssim 1$$

et donc

$$|E_1(\tau, H)| \lesssim J(H)^{-\frac{1}{2}}$$

car les coefficients U_k sont bornés. En combinant avec (B.19), nous concluons que

$$|E(\tau, H)| \lesssim |E_1(\tau, H)| + |E_2(\tau, H)| \lesssim T^{3(\frac{d}{2}+1)} (\log T - \log s) e^{-\langle \rho, H \rangle} \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}.$$

□

Bibliographie

- [Alb99] P. ALBUQUERQUE, Patterson-Sullivan theory in higher rank symmetric spaces, *Geom. Funct. Anal.* 9 (1999), 1-28, [MR1675889](#). 8, 94
- [Ank90] J.-Ph. ANKER, L_p Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type, *Ann. of Math. (2)* 132 (1990), 597-628, [MR1078270](#). 2, 12, 21, 89, 90, 100
- [Ank91] J.-Ph. ANKER, The spherical Fourier transform of rapidly decreasing functions. A simple proof of a characterization due to Harish-Chandra, Helgason, Trombi, and Varadarajan, *J. Funct. Anal.* 96 (1991), 331-349, [MR1101261](#). 21, 89
- [Ank92] J.-Ph. ANKER, Sharp estimates for some functions of the Laplacian on noncompact symmetric spaces, *Duke Math. J.* 65 (1992), 257-297, [MR1150587](#). 2, 12, 13, 21, 89, 100
- [AnJi99] J.-Ph. ANKER et L. JI, Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces, *Geom. Funct. Anal.* 9 (1999), 1035-1091, [MR1736928](#). 2, 7, 10, 11, 47, 93, 100
- [AnLo86] J.-Ph. ANKER et N. LOHOUE, Multiplicateurs sur certains espaces symétriques, *Amer. J. Math.* 108 (1986), 1303-1353, [MR0868894](#). 2, 100
- [AnOs03] J.-Ph. ANKER et P. OSTELLARI, The heat kernel on noncompact symmetric spaces, in : *"Lie groups and symmetric spaces"*, 27-46, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 210, *Amer. Math. Soc., Providence, RI* (2003), [MR2018351](#). 94, 98
- [AnPi09] J.-Ph. ANKER et V. PIERFELICE, Nonlinear Schrödinger equation on real hyperbolic spaces, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 26 (2009), 1853-1869, [MR2566713](#). 2, 97, 98
- [AnPi14] J.-Ph. ANKER et V. PIERFELICE, Wave and Klein-Gordon equations on hyperbolic spaces, *Anal. PDE* 7 (2014), 953-995, [MR3254350](#). 1, 2, 14, 17, 18, 24, 25, 27, 39, 40, 44, 45, 51, 68, 70, 74, 75, 77, 78, 83, 86
- [APV11] J.-Ph. ANKER, V. PIERFELICE et M. VALLARINO, Schrödinger equations on Damek-Ricci spaces, *Comm. Partial Differential Equations* 36 (2011), 976-997, [MR2765426](#). 13, 36, 66, 97
- [APV12] J.-Ph. ANKER, V. PIERFELICE et M. VALLARINO, The wave equation on hyperbolic spaces, *J. Differential Equations* 252 (2012), 5613-5661, [MR2902129](#). 1, 14, 24, 27, 39, 40, 44, 45, 68, 74, 75
- [APV15] J.-Ph. ANKER, V. PIERFELICE et M. VALLARINO, The wave equation on Damek-Ricci spaces, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 194 (2015), 731-758, [MR3345662](#). 1, 17, 24, 44, 70, 74, 78
- [AnZh20a] J.-Ph. ANKER et H.-W. ZHANG, Bottom of the L^2 spectrum of the Laplacian on locally symmetric spaces, *preprint* (2020), arXiv : [2006.06473](#). 3, 87
- [AnZh20b] J.-Ph. ANKER et H.-W. ZHANG, Wave equation on general Riemannian noncompact symmetric spaces, *preprint* (2020), arXiv : [2010.08467](#). 2, 43
- [BaGe99] H. BAHOURI et P. GÉRARD, High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *Amer. J. Math.* 121 (1999), 131-175, [MR1705001](#). 74
- [Ban07] V. BANICA, The nonlinear Schrödinger equation on hyperbolic space, *Comm. Partial Differential Equations* 32 (2007), 1643-1677, [MR2372482](#). 97
- [BCS08] V. BANICA, R. CARLES et G. STAFFILANI, Scattering theory for radial nonlinear Schrödinger equations on hyperbolic space, *Geom. Funct. Anal.* 18 (2008), 367-399, [MR2421543](#). 97

- [Bér77] P. H. BÉRARD, On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points, *Math. Z.* 155 (1977), 249-276, [MR0455055](#). 3, 14, 45, 59, 101, 105
- [BeLö76] J. BERGH et J. LÖFSTRÖM, Interpolation spaces—An introduction, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 223, *Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1976, [MR0482275](#). 12
- [Bon17] Y. BONTHONNEAU, The Θ function and the Weyl law on manifolds without conjugate points, *Doc. Math.* 22 (2017), 1275-1283, [MR3690266](#). 101
- [Bou11] J.-M. BOUCLET, Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds, *Anal. PDE* 4 (2011), 1-84, [MR2783305](#). 97
- [BoTz07] J.-M. BOUCLET et N. TZVETKOV, Strichartz estimates for long range perturbations, *Amer. J. Math.* 129 (2007), 1565-1609, [MR2369889](#). 97
- [Bou93] J. BOURGAIN, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations, *Geom. Funct. Anal.* 3 (1993), 107-156, [MR1209299](#). 97
- [BoDy18] J. BOURGAIN et S. DYATLOV, Spectral gaps without the pressure condition, *Ann. of Math. (2)* 187 (2018), 825-867, [MR3779959](#). 98
- [BOS95] T. BRANSON, G. ÓLAFSSON et H. SCHLICHTKRULL, Huyghens' principle in Riemannian symmetric spaces, *Math. Ann.* 301 (1995), 445-462, [MR1324519](#). 11
- [BrHa99] M. R. BRIDSON et A. HAEFLIGER, Metric spaces of non-positive curvature, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319, *Springer-Verlag, Berlin*, 1999, [MR1744486](#). 80
- [BuOl00] U. BUNKE et M. OLBRICH, The spectrum of Kleinian manifolds, *J. Funct. Anal.* 172 (2000), 76-164, [MR1749869](#). 74, 80
- [BGT04] N. BURQ, P. GÉRARD et N. TZVETKOV, Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds, *Amer. J. Math.* 126 (2004), 569-605, [MR2058384](#). 97, 98
- [BGH10] N. BURQ, C. GUILLARMOU et A. HASSELL, Strichartz estimates without loss on manifolds with hyperbolic trapped geodesics, *Geom. Funct. Anal.* 20 (2010), 627-656, [MR2720226](#). 98
- [Car26] E. CARTAN, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France* 54 (1926), 214-264, [MR1504900](#). 2
- [Car27] E. CARTAN, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. II, *Bull. Soc. Math. France* 55 (1927), 114-134, [MR1504909](#). 2
- [Caz03] T. CAZENAVE, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10, *New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI*, 2003, [MR2002047](#). 3
- [CaWe90] T. CAZENAVE et F. B. WEISSLER, The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s , *Nonlinear Anal.* 14 (1990), 807-836, [MR1055532](#). 97
- [ClSt74] J. L. CLERC et E. M. STEIN, L^p -multipliers for noncompact symmetric spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 71 (1974), 3911-3912, [MR0367561](#). 100
- [CKSTT10] J. COLLIANDER, M. KEEL, G. STAFFILANI, H. TAKAOKA et T. TAO, Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation, *Invent. Math.* 181 (2010), 39-113, [MR2651381](#). 97
- [Cor90] K. CORLETTE, Hausdorff dimensions of limit sets. I, *Invent. Math.* 102 (1990), 521-541, [MR1074486](#). 21, 22, 75, 88, 93, 94, 99
- [Cow78] M. COWLING, The Kunze-Stein phenomenon, *Ann. Math. (2)* 107 (1978), 209-234, [MR0507240](#). 13, 79
- [Cow97] M. COWLING, Herz's "principe de majoration" and the Kunze-Stein phenomenon, in : "*Harmonic analysis and number theory (Montreal, PQ, 1996)*", 73-88, CMS Conf. Proc., 21, *Amer. Math. Soc., Providence, RI* (1997), [MR1472779](#). 36, 66
- [CGM93] M. COWLING, S. GIULINI et S. MEDA, L^p - L^q estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces. I, *Duke Math. J.* 72 (1993), 109-150, [MR1242882](#). 2, 100

- [CGM95] M. COWLING, S. GIULINI et S. MEDA, L^p - L^q -estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces. II, *J. Lie Theory* 5 (1995), 1-14, [MR1362006](#). 2, 100
- [CGM01] M. COWLING, S. GIULINI et S. MEDA, L^p - L^q estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces. III, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 51 (2001), 1047-1069, [MR1849214](#). 14, 45, 52, 58, 59, 100, 101, 107
- [CGM02] M. COWLING, S. GIULINI et S. MEDA, Oscillatory multipliers related to the wave equation on noncompact symmetric spaces, *J. London Math. Soc. (2)* 66 (2002), 691-709, [MR1934300](#). 25, 45, 100
- [DGK01] P. D'ANCONA, V. GEORGIEV et H. KUBO, Weighted decay estimates for the wave equation, *J. Differential Equations* 177 (2001), 146-208, [MR1867616](#). 1, 24, 44, 74
- [DaMa88] E. B. DAVIES et N. MANDOUVALOS, Heat kernel bounds on hyperbolic space and Kleinian groups, *Proc. London Math. Soc. (3)* 57 (1988), 182-208, [MR0940434](#). 94, 95
- [Dix77] J. DIXMIER, C^* -algebras, North-Holland Mathematical Library, 15, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977, [MR0458185](#). 80
- [DKV79] J. J. DUISTERMAAT, J. A. C. KOLK et V. S. VARADARAJAN, Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curvature, *Invent. Math.* 52 (1979), 27-93, [MR0532745](#). 11
- [Ebe96] P. B. EBERLEIN, Geometry of nonpositively curved manifolds, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996, [MR1441541](#). 3
- [Els73a] J. ELSTRODT, Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. I, *Math. Ann.* 203 (1973), 295-300, [MR0360472](#). 21, 88
- [Els73b] J. ELSTRODT, Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. II, *Math. Z.* 132 (1973), 99-134, [MR0360473](#). 21, 88
- [Els74] J. ELSTRODT, Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. III, *Math. Ann.* 208 (1974), 99-132, [MR0360474](#). 21, 88
- [Fef95] C. FEFFERMAN, Selected theorems by Eli Stein, in : "Essays on Fourier analysis in honor of Elias M. Stein (Princeton, NJ, 1991)", 1-35, Princeton Math. Ser., 42, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1995), [MR1315540](#). 13
- [Fon94] J. FONTAINE, Une équation semi-linéaire des ondes sur \mathbf{H}^3 , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 319 (1994), 945-948, [MR1302795](#). 1, 74
- [Fon97] J. FONTAINE, A semilinear wave equation on hyperbolic spaces, *Comm. Partial Differential Equations* 22 (1997), 633-659, [MR1443052](#). 1, 24, 44, 74
- [FMM18] A. FOTIADIS, N. MANDOUVALOS et M. MARIAS, Schrödinger equations on locally symmetric spaces, *Math. Ann.* 371 (2018), 1351-1374, [MR3831274](#). 19, 74, 75, 98
- [Gan68] R. GANGOLLI, Asymptotic behavior of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces, *Acta Math.* 121 (1968), 151-192, [MR0239000](#). 98
- [GaVa88] R. GANGOLLI et V. S. VARADARAJAN, Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, 101, Springer-Verlag, Berlin, 1988, [MR0954385](#). 2, 3, 10, 11, 25, 47, 74, 77
- [GLS97] V. GEORGIEV, H. LINDBLAD et C. SOGGE, Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations, *Amer. J. Math.* 119 (1997), 1291-1319, [MR1481816](#). 1, 17, 24, 44, 69, 74
- [GePi10] P. GÉRARD et V. PIERFELICE, Nonlinear Schrödinger equation on four-dimensional compact manifolds, *Bull. Soc. Math. France* 138 (2010), 119-151, [MR2638892](#). 97
- [GiVe85] J. GINIBRE et G. VELO, The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 2 (1985), 309-327, [MR0801582](#). 97
- [GiVe95] J. GINIBRE et G. VELO, Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, *J. Funct. Anal.* 133 (1995), 50-68, [MR1351643](#). 1, 24, 74
- [GiMe90] S. GIULINI et S. MEDA, Oscillating multipliers on noncompact symmetric spaces, *J. Reine Angew. Math.* 409 (1990), 93-105, [MR1061520](#). 45, 100

- [Gla81] R. T. GLASSEY, Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations, *Math. Z.* 177 (1981), 323-340, [MR0618199](#). 17
- [HaSt03] B. C. HALL et M. B. STENZEL, Sharp bounds for the heat kernel on certain symmetric spaces of non-compact type, in : "*Finite and infinite dimensional analysis in honor of Leonard Gross (New Orleans, LA, 2001)*", 117-135, *Contemp. Math.*, 317 *Amer. Math. Soc., Providence, RI* (2003), [MR1966891](#). 103
- [Han12] Z. HANI, Global well-posedness of the cubic nonlinear Schrödinger equation on closed manifolds, *Comm. Partial Differential Equations* 37 (2012), 1186-1236, [MR2942981](#). 97
- [Har54] HARISH-CHANDRA, Representations of semisimple Lie groups. III, *Trans. Amer. Math. Soc.* 76 (1954), 234-253, [MR0062747](#). 80
- [Has11] A. HASSANI, Wave equation on Riemannian symmetric spaces, *J. Math. Phys.* 52 (2011), 043514, [MR2964197](#). 2, 24, 44
- [Hel62] S. HELGASON, Differential geometry and symmetric spaces, Pure and Applied Mathematics, XII, *Academic Press, New York-London*, 1962, [MR0145455](#). 2, 3
- [Hel78] S. HELGASON, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Pure and Applied Mathematics, 80, *Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London*, 1978, [MR514561](#). 2, 3, 25, 45, 47, 74, 77, 88
- [Hel92] S. HELGASON, Huygens' principle for wave equations on symmetric spaces, *J. Funct. Anal.* 107 (1992), 279-288, [MR1172025](#). 11
- [Hel94] S. HELGASON, Geometric analysis on symmetric spaces, Mathematical Surveys and Monographs, 39, *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1994, [MR1280714](#). 3
- [Hel00] S. HELGASON, Groups and geometric analysis : integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions (Corrected reprint of the 1984 original), Mathematical Surveys and Monographs, 83, *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2000, [MR1790156](#). 2, 3, 11, 12, 25, 45, 47, 74, 77, 88, 101
- [Her13] S. HERR, The quintic nonlinear Schrödinger equation on three-dimensional Zoll manifolds, *Amer. J. Math.* 135 (2013), 1271-1290, [MR3117307](#). 97
- [HTT11] S. HERR, D. TATARU et N. TZVETKOV, Global well-posedness of the energy-critical nonlinear Schrödinger equation with small initial data in $H^1(\mathbb{T}^3)$, *Duke Math. J.* 159 (2011), 329-349, [MR2824485](#). 97
- [Her70] C. HERZ, Sur le phénomène de Kunze-Stein, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 271 (1970), A491-A493, [MR0281022](#). 13, 79
- [Hor94] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential operators III, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 274, *Springer-Verlag, Berlin*, 1994, [MR1313500](#). 59, 101
- [Ion00a] A. D. IONESCU, An endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon and related maximal operators, *Ann. of Math. (2)* 152 (2000), 259-275, [MR1792296](#). 13, 79
- [Ion00b] A. D. IONESCU, Fourier integral operators on noncompact symmetric spaces of real rank one, *J. Funct. Anal.* 174 (2000), 274-300, [MR1767376](#). 44, 100
- [IoPa12] A. D. IONESCU et B. PAUSADER, The energy-critical defocusing NLS on \mathbb{T}^3 , *Duke Math. J.* 161 (2012), 1581-1612, [MR2931275](#). 97
- [IoSt09] A. D. IONESCU et G. STAFFILANI, Semilinear Schrödinger flows on hyperbolic spaces : scattering H^1 , *Math. Ann.* 345 (2009), 133-158, [MR2520054](#). 2, 97
- [Joh79] F. JOHN, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.* 28 (1979), 235-268, [MR0535704](#). 17, 69
- [Kap94] L. KAPITANSKI, Weak and yet weaker solutions of semilinear wave equations, *Comm. Partial Differential Equations* 19 (1994), 1629-1676, [MR1294474](#). 1, 24, 44, 74
- [Kat80] T. KATO, Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 33 (1980), 501-505, [MR0575735](#). 17, 69
- [Kat87] T. KATO, On nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* 46 (1987), 113-129, [MR0877998](#). 97

- [KeTa98] M. KEEL et T. TAO, Endpoint Strichartz estimates, *Amer. J. Math.* 120 (1998), 955-980, [MR1646048](#). 1, 20, 24, 38, 44, 67, 74, 84, 97
- [KIPo83] S. KLAINERMAN et G. PONCE, Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983), 133-141, [MR0680085](#). 17
- [KILe06] B. KLEINER et B. LEEB, Rigidity of invariant convex sets in symmetric spaces, *Invent. Math.* 163 (2006), 657-676, [MR2207236](#). 41, 99
- [Kna96] Anthony W. KNAPP, Lie groups beyond an introduction, Progress in Mathematics, 140, *Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA*, 1996, [MR1399083](#). 3
- [Kni97] G. KNIEPER, On the asymptotic geometry of nonpositively curved manifolds, *Geom. Funct. Anal.* 7 (1997), 755-782, [MR1465601](#). 90
- [Kor93] Adam KORÁNYI, Spectral properties of the Cartan matrices, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 57 (1993), 587-592, [MR1243309](#). 47
- [Kos69] B. KOSTANT, On the existence and irreducibility of certain SERIES of representations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 627-642, [MR0245725](#). 80
- [KuSt60] R. A. KUNZE et E. M. STEIN, Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, *Amer. J. Math.* 82 (1960), 1-62, [MR0163988](#). 13, 79
- [Leu03] E. LEUZINGER, Kazhdan's property (T), L^2 -spectrum and isoperimetric inequalities for locally symmetric spaces, *Comment. Math. Helv.* 78 (2003), 116-133, [MR1966754](#). 22, 94
- [Leu04] E. LEUZINGER, Critical exponents of discrete groups and L^2 -spectrum, *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004), 919-927, [MR2019974](#). 21, 88, 93
- [LiSo95] H. LINDBLAD et C. D. SOGGE, On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations, *J. Funct. Anal.* 130 (1995), 357-426, [MR1335386](#). 1, 24, 44, 74
- [LoMa09] N. LOHOUE et M. MARIAS, Invariants géométriques des espaces localement symétriques et théorèmes de multiplicateurs, *Math. Ann.* 343 (2009), 639-667, [MR2480706](#). 13, 79
- [LoMa14] N. LOHOUE et M. MARIAS, Multipliers on locally symmetric spaces, *J. Geom. Anal.* 24 (2014), 627-648, [MR3192290](#). 13, 79
- [MNO04] S. MACHIYARA, M. NAKAMURA et T. OZAWA, Small global solutions for nonlinear Dirac equations, *Differential Integral Equations* 17 (2004), 623-636, [MR2054938](#). 74
- [MeTa11] J. METCALFE et M. TAYLOR, Nonlinear waves on 3D hyperbolic space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 363 (2011), 3489-3529, [MR2775816](#). 1, 17, 24, 44, 70
- [MeTa12] J. METCALFE et M. TAYLOR, Dispersive wave estimates on 3D hyperbolic space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 140 (2012), 3861-3866, [MR2944727](#). 1, 17, 24, 44, 70
- [Mor15] D. W. MORRIS, Introduction to arithmetic groups, Deductive Press, 2015, [MR3307755](#). 4
- [Nak99] K. NAKANISHI, Scattering theory for the nonlinear Klein-Gordon equation with Sobolev critical power, *Internat. Math. Res. Notices* (1999), 31-60, [MR1666973](#). 74
- [DLMF] *NIST Digital Library of Mathematical Functions, Release 1.0.28 of 2020-09-15*, F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds. URL : <https://dlmf.nist.gov/5.6#ii>. 52
- [Pat76] S.J. PATTERSON, The limit set of a Fuchsian group, *Acta Math.* 136 (1976), 241-273, [MR0450547](#). 21, 88
- [Qui05] J.-F. QUINT, Groupes convexes cocompacts en rang supérieur, *Geom. Dedicata* 113 (2005), 1-19, [MR2171296](#). 41, 99
- [Sch88] T. P. SCHONBEK, L^p -multipliers : a new proof of an old theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 102 (1988), 361-364, [MR0921000](#). 45
- [Sid84] T. C. SIDERIS, Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, *J. Differential Equations* 52 (1984), 378-406, [MR0744303](#). 17
- [SSW19] Y. SIRE, C. D. SOGGE et C. WANG, The Strauss conjecture on negatively curved backgrounds, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 39 (2019), 7081-7099, [MR4026182](#). 17, 70

- [SSWZ19] Y. SIRE, C. D. SOGGE, C. WANG et J. ZHANG, Strichartz estimates and Strauss conjecture on non-trapping asymptotically hyperbolic manifolds, *preprint* (2019), arXiv : [1910.02510](#). [17](#), [70](#)
- [Sog08] C. D. SOGGE, Lectures on non-linear wave equations (second version), *International Press, Boston, MA*, 2008, [MR2455195](#). [3](#)
- [StTo78] R. J. STANTON et P. A. TOMAS, Expansions for spherical functions on noncompact symmetric spaces, *Acta Math.* 140 (1978), 251-276, [MR0511124](#). [100](#)
- [Ste56] E. M. STEIN, Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 83 (1956), 482-492, [MR0082586](#). [13](#)
- [Ste70a] E. M. STEIN, Analytic continuation of group representations, *Advances in Math.* 4 (1970), 172-207 (1970), [MR0263985](#). [13](#)
- [Ste70b] E. M. STEIN, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Mathematical SERIES, 30, *Princeton University Press, Princeton, N.J.*, 1970, [MR0290095](#). [12](#)
- [Ste93] E. M. STEIN, Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Mathematical SERIES, 43, *Princeton University Press, Princeton, NJ*, 1993, [MR1232192](#). [14](#), [28](#), [54](#), [78](#)
- [Stra81] W. A. STRAUSS, Nonlinear scattering theory at low energy, *J. Functional Analysis* 41 (1981), 110-133, [MR0614228](#). [17](#), [69](#)
- [Stro81] J.-O. STRÖMBERG, Weak type L^1 estimates for maximal functions on noncompact symmetric spaces, *Ann. of Math. (2)* 114 (1981), 115-126, [MR0625348](#). [2](#), [90](#)
- [Sul87] D. SULLIVAN, Related aspects of positivity in Riemannian geometry, *J. Differential Geom.* 25 (1987), 327-351, [MR0882827](#). [21](#), [88](#)
- [Tao06] T. TAO, Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 106, *Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI*, 2006, [MR2233925](#). [1](#), [2](#), [3](#)
- [TVZ07] T. TAO, M. VISAN et X. ZHANG, Global well-posedness and scattering for the defocusing mass-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data in high dimensions, *Duke Math. J.* 140 (2007), 165-202, [MR2355070](#). [97](#)
- [Tat01] D. TATARU, Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for the semi-linear wave equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), 795-807, [MR1804518](#). [1](#), [17](#), [24](#), [44](#), [69](#)
- [Tay89] M. E. TAYLOR, L^p -estimates on functions of the Laplace operator, *Duke Math. J.* 58 (1989), 773-793, [MR1016445](#). [100](#)
- [Tri92] H. TRIEBEL, Theory of function spaces II, Monographs in Mathematics, 84, *Birkhäuser Verlag, Basel*, 1992, [MR1163193](#). [12](#), [39](#), [68](#), [83](#)
- [Tsu87] Y. TSUTSUMI, L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups, *Funkcial. Ekvac.* 30 (1987), 115-125, [MR0915266](#). [97](#)
- [Wan19] J. WANG, Strichartz estimates for convex co-compact hyperbolic surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 147 (2019), 873-883, [MR3894924](#). [98](#)
- [Web08] A. WEBER, Heat kernel bounds, Poincaré SERIES, and L^2 spectrum for locally symmetric spaces, *Bull. Aust. Math. Soc.* 78 (2008), 73-86, [MR2458299](#). [21](#), [88](#), [89](#), [94](#), [95](#)
- [Zhw19] H.-W. ZHANG, Wave and Klein–Gordon Equations on Certain Locally Symmetric Spaces, *To appear in J. Geom. Anal.* (2019), arXiv : [1809.05468](#). [3](#), [41](#), [73](#)
- [Zhw20] H.-W. ZHANG, Wave equation on certain Riemannian noncompact symmetric spaces, *preprint* (2020), arXiv : [2007.11724](#). [2](#), [23](#), [44](#), [45](#), [51](#), [53](#), [68](#)
- [Zha20a] Y. ZHANG, Scale invariant Strichartz estimates on compact globally symmetric spaces, *preprint* (2020), arXiv : [2005.00429](#). [97](#)
- [Zha20b] Y. ZHANG, Strichartz estimates for the Schrödinger flow on compact Lie groups, *Anal. PDE* 13 (2020), 1173-1219, [MR4109904](#). [97](#)

Hongwei ZHANG

Équation des ondes sur les espaces symétriques et localement symétriques de type non compact

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude de l'équation des ondes sur les espaces symétriques et localement symétriques de type non compact. Un de nos principaux résultats est l'obtention des estimations ponctuelles du noyau pour l'équation des ondes sur les espaces symétriques non compacts de rang supérieur. Elles nous permettent de démontrer la propriété de dispersion et d'établir l'inégalité de Strichartz pour une grande famille des paires admissibles. Nous en déduisons que l'équation des ondes semi-linéaire correspondante est globalement bien posée pour les données initiales de régularité faible. Autrement dit, nous étendons les résultats obtenus sur les espaces hyperboliques réels aux espaces symétriques non compacts de rang général. L'autre partie de nos travaux concerne l'étude sur les espaces localement symétriques. D'un côté, nous étudions les équations des ondes et de Klein-Gordon sur certains espaces localement symétriques de rang un. D'autre part, nous établissons une caractérisation pour le bas du spectre L^2 du laplacien sur les espaces localement symétriques de rang général.

Mots clés : Espace symétrique, espace localement symétrique, équation des ondes, équation de Klein-Gordon, estimation du noyau, propriété de dispersion, inégalité de Strichartz, spectre de laplacien.

Wave equation on symmetric and locally symmetric spaces of noncompact type

Abstract : This thesis is devoted to the study of the wave equation on symmetric and locally symmetric spaces of noncompact type. One of our main results is to obtain pointwise kernel estimates for the wave equation on noncompact symmetric spaces of higher rank. They allow us to prove the dispersive property and to establish the Strichartz inequality for a large family of admissible pairs. We deduce global well-posedness results for the corresponding semilinear wave equation with low regularity initial data. In other words, we extend the results obtained on real hyperbolic spaces to noncompact symmetric spaces of general rank. The other part of our work concerns the study on locally symmetric spaces. On the one hand, we study the wave and Klein-Gordon equations on certain locally symmetric spaces of rank one. On the other hand, we establish a characterization for the bottom of L^2 spectrum of Laplacian on locally symmetric spaces of general rank.

Keywords : Symmetric space, locally symmetric space, wave equation, Klein-Gordon equation, kernel estimate, dispersive property, Strichartz inequality, spectrum of Laplacian.